

ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DI TORINO

ATTI
DEL
3° CONVEGNO NAZIONALE
DI
RELATIVITÀ GENERALE
E
FISICA DELLA GRAVITAZIONE

Torino, 18-21 settembre 1978

SUPPLEMENTO AL VOL. 114 (1980) DEGLI
Atti della Accademia delle Scienze di Torino
I – Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
1981



PREFAZIONE

Nei giorni 18 - 21 settembre 1978 si è tenuto presso questa Accademia il 3° Convegno Nazionale di Relatività e Fisica della Gravitazione. Dato l'alto livello scientifico delle conferenze e comunicazioni tenute al Convegno e il notevole successo che esso ha avuto, questa Accademia, con l'intento di fare cosa utile alla comunità scientifica italiana e internazionale, ha ritenuto opportuno pubblicarne gli Atti.



SALUTO DEL PRESIDENTE NORBERTO BOBBIO

Narra Gaspare Gorresio, il celebre indianista, che fu per tanti anni socio di questa accademia, che verso la metà del secolo decimottavo, esattamente nel 1757, «il conte Giuseppe Angelo Saluzzo di Menusiglio, prestante cultore degli studi chimici, formò in Torino con due giovani piemontesi d'animoso e forte ingegno, Luigi de la Grange e Giovanni Cigna, ambedue discepoli del padre Beccaria, una privata società scientifica». Dopo due anni questa società scientifica pubblicò un volume dal titolo *Miscellanea philosophica-matematica societatis privatae taurinensis*; che conteneva due celebri memorie di Lagrange. Da questa società privata nacque la società reale che fu riconosciuta nel 1783 (come vedete siamo vicini al secondo centenario), come Accademia reale delle Scienze con un'unica classe, quella di scienze fisiche e matematiche.

Ho ricordato brevemente le nostre origini, che peraltro sono ben note ai colleghi torinesi, per mostrarvi che le nostre ascendenze sono tali da giustificare il desiderio da noi espresso e finalmente oggi esaudito di ospitare nelle nostre sale gli scienziati che si riuniscono per il terzo convegno nazionale di relatività generale e fisica della gravitazione. A chi non lo sapesse voglio dire, pur non esistendo ancora una Società italiana di relatività generale, come esiste in altri paesi, il gruppo di scienziati italiani che si dedicano allo studio della relatività partecipa attivamente all'attività della International Society for General Relativity and Gravitation, che ha sede a Berna e pubblica il Journal of General Relativity and Gravitation, organizzando ogni tre anni i congressi internazionali, l'ultimo dei quali, l'ottavo, si è svolto l'anno scorso in Canada. Terzo convegno nazionale quello torinese di questi giorni, perché segue ai due precedenti di Padova e di Ferrara.

Non spetta certo a me, pervicacemente incompetente nelle discipline matematiche e ignorante di storia delle scienze, ricordare che la relatività generale ha una tradizione in Italia che risale ai tempi in cui Albert Einstein (di cui il prossimo anno sarà celebrato in tutto il mondo il centenario della nascita) ne pose i fondamenti nel 1916. Ma devo alla cortesia del prof. Galletto, che desidero ringraziare

prima di ogni altro per l'impegno intelligente ed efficace che ha dedicato all'organizzazione di questo convegno, la notizia per me illuminante che nel 1916 Einstein nella premessa alla celebre memoria esprime il suo debito di riconoscenza ai matematici italiani Ricci e Levi-Civita per aver approntati «i mezzi matematici necessari per la teoria della relatività . . . nel calcolo differenziale assoluto» e di aver riaffermato nell'ultimo scritto prima della morte «l'apporto importantissimo di Levi-Civita». Sono noti anche i rapporti fra Einstein e Guido Fubini che fu per tanti anni professore nel nostro politecnico, testimoniati da una lettera autografa di Einstein che mi dicono essere custodita nella Biblioteca di matematica della nostra università.

Il piacere che abbiamo di ospitarvi nella nostra sede deriva anche dalla ferma convinzione che proprio questa sia la funzione precipua delle accademie: essere un luogo d'incontro fra studiosi delle più varie discipline per conoscersi e far conoscere i risultati delle proprie ricerche. Per questo scopo sono nate (nell'art. 1 del nostro istituto è scritto che il suo scopo è di «contribuire al progresso scientifico»), per questo scopo sono desinate a restare pur nel mutamento dei tempi, dei costumi, dei mezzi di comunicazione, dei rapporti fra disciplina e disciplina. A questo scopo corrisponde, ne sono sicuro, il vostro convegno per l'autorità dei partecipanti e per l'importanza del tema che avete prescelto.

Permettetemi di aggiungere che questa accademia, oltre al titolo di nobiltà, che vi ho ricordato all'inizio, può vantare per essere degna di un convegno di tanta importanza la bellezza e la solennità della sua sede. Il Palazzo dell'Accademia delle Scienze è uno dei monumenti più illustri della grande architettura barocca piemontese. Nato per ospitare il Collegio dei Nobili, tenuto dai Gesuiti, fu costruito dal Guarini a cominciare dal 1679 e proseguito dai suoi discepoli. La nostra accademia vi si insediò nel 1787 e quando vi entrarono gli accademici la decorazione di questa sala fu affidata a Bernardino Galliari. Ed è rimasta immutata, come potete vedere, guardandovi attorno, attraverso gli anni, miracolosamente illesa durante l'ultima guerra quando la contigua Piazza San Carlo fu devastata, quasi svuotata, dai frequenti bombardamenti che danneggiarono gravemente il centro storico torinese.

Ringrazio le autorità che hanno voluto con la loro presenza testimoniare l'interesse che recano alla nostra attività e ai vostri lavori. Porgo il più cordiale benvenuto a tutti gl'intervenuti, in particolare ai colleghi stranieri, che onorano con la loro presenza il convegno.

PAROLE DI INTRODUZIONE
DEL PROF. CATALDO AGOSTINELLI
PRESIDENTE DEL CONVEGNO

Ringrazio innanzitutto caldamente il Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino, Prof. Norberto Bobbio, che con illuminata saggezza e conscio dei compiti e delle prerogative di questa stessa Accademia, ha concesso che questo III Convegno Nazionale di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione, si svolgesse sotto l'egida di questa antica e illustre istituzione, mettendo a disposizione, per il suo svolgimento, questo austero e storico salone d'onore.

Ringrazio con pari calore il Presidente della Regione Piemonte, Avv. Aldo Viglione, che fra le molteplici cure e responsabilità della sua alta carica ha voluto, non solo presenziare l'apertura di questo Convegno con un indirizzo di saluto, ma assegnare un notevole contributo finanziario per l'ottima riuscita di esso.

Vivissimi ringraziamenti ho l'onore di porgere ancora al Sindaco di Torino, Dottor Diego Novelli, che con spiccata sensibilità ha voluto, colla sua presenza, dimostrare l'interessamento della Città a questa manifestazione di alta cultura.

Ringrazio cordialmente il Rettore Magnifico della nostra Università, Prof. Giorgio Cavallo, che fra le cure e l'impiego continuo che il governo del nostro Ateneo richiede in questi tempi difficili, ha trovato il modo di venire a porgere il suo saluto a questa assemblea di illustri scienziati.

Un grato ringraziamento devo rivolgere ancora al Consiglio Nazionale delle Ricerche che ha fornito a questo Convegno il suo sostanziale appoggio finanziario.

Un vivo ringraziamento rivolgo anche alla Presidenza della Fiat che, con manifesto senso di mecenatismo, ha disposto un generoso contributo per le spese necessarie del Convegno.

Infine permettetemi di esprimere il più vivo e affettuoso ringraziamento al valoroso e dinamico Prof. Dionigi Galletto, nostro consocio e Direttore dell'Istituto di Fisica matematica della nostra Università, che con grande competenza e passione ha mirabilmente organizzato questo convegno.

E ora mi è molto gradito porgere il più caloroso benvenuto a tutti i partecipanti al Convegno, che colle loro relazioni e discussioni porteranno certamente un elevato contributo a quelle questioni che verranno dibattute, riguardanti soprattutto

le teorie relativistiche, gravitazionali e cosmogoniche, attualmente di grande interesse.

In particolare in questa circostanza ho il grande piacere di porgere, da parte mia e dell'Accademia, il più caro e affettuoso saluto al Prof. Edoardo Amaldi, Accademico nazionale dei Lincei e fisico di fama mondiale, che da pochi giorni, il 5 settembre, ha compiuto i settanta anni di età.

Egli fu collega di Enrico Fermi, Emilio Segrè, Franco Rasetti e Bruno Pontecorvo in quel celebre Istituto di Fisica di via Panisperna in Roma in cui si iniziarono quelle famose ricerche sui neutroni e sulle sostanze radioattive che hanno aperto la via all'immenso sviluppo della Fisica nucleare.

I cospicui contributi dell'Amaldi nello studio delle proprietà fisiche dei neutroni, nella scoperta di nuove sostanze radioattive e i risultati ultimamente conseguiti nell'Università di Roma negli esperimenti sulle onde gravitazionali, di cui parlerà in questo Convegno, gli hanno valso ampi riconoscimenti da parte delle maggiori Accademie del mondo, e noi quest'oggi gli formuliamo l'augurio di lunga vita e di ulteriori successi.

E' molto significativo che questo III Convegno Nazionale di Relatività Generale, a quasi un secolo di distanza dalla nascita di Alberto Einstein, che nacque ad Ulm il 14 marzo 1879, si svolga in questa Accademia creata da Giuseppe Luigi Lagrange, il grande fondatore della Meccanica analitica e del Calcolo delle variazioni, che tanto ausilio hanno dato nello sviluppo teorico di quelle idee feconde sulla Relatività scaturite dalla mente geniale di Alberto Einstein, idee che hanno sconvolto i concetti di spazio e di tempo e aperta un'era nuova nello sviluppo della Fisica.

Particolare rilievo in questo Convegno sarà dato agli studi sulle nuove leggi della Gravitazione che discendono dall'impostazione einsteniana, secondo la quale la gravitazione viene attribuita a una curvatura dell'Universo, riducendone quindi lo studio alle proprietà geometriche dello spazio-tempo quadrimensionale, non più pseudo-euclideo ma riemanniano. La massa della materia si identifica così colla curvatura dello spazio-tempo.

Queste nuove idee e le leggi che ne conseguono hanno portato un torrente di luce su molti fenomeni; ma il mistero dell'essenza della gravitazione rimane ancora, ed è una delle incognite su cui continueranno a cimentarsi i cultori della filosofia naturale.

Io ora non voglio entrare nei dettagli delle questioni che saranno dibattute in questo Convegno, questioni nate dal divario che esiste fra alcuni risultati delle osservazioni e quelli forniti dalla legge di gravitazione di Newton, come quello relativo al fenomeno dello spostamento del perielio di Mercurio.

Un ampio quadro dello sviluppo della Relatività Generale dalla Cosmologia alla fisica della Galassia e sulla fenomenologia che le teorie relativistiche

prevedono per i fenomeni cosmici, dall'origine dell'Universo all'evoluzione stellare, sarà fornito dal Prof. Remo Ruffini dell'Università di Roma.

Il Prof. Edoardo Amaldi riferirà, come ho già accennato, sui recenti progressi degli esperimenti sulle onde gravitazionali, da anni in corso presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Roma, esperimenti che hanno per iscopo la rivelazione della radiazione gravitazionale prevista teoricamente da Einstein.

Di argomenti connessi con la radiazione gravitazionale, nell'aspetto della teoria e della rivelazione, si occuperà, con la sua ben nota competenza, il Prof. Bruno Bertotti dell'Università di Pavia.

Il Prof. Dionigi Galletto ci dirà quindi dei suoi brillanti risultati sugli studi relativi alla legge di Hubble sull'espansione dell'Universo e alle implicazioni che conducono alla teoria newtoniana della gravitazione.

Il Prof. Tullio Regge, della nostra Università ci farà poi conoscere le nuove teorie supersimmetriche della gravitazione, riferendo sull'interessante campo di ricerche teoriche che in questi ultimi anni ha portato alla formulazione di nuove teorie fisiche, le quali, accanto a fenomeni puramente gravitazionali, permettono di studiare fenomeni di natura particolare.

Il collega Prof. Carlo Cattaneo dell'Università di Roma ci illustrerà alcuni aspetti classici e relativistici del principio di Mach relativo all'influenza esercitata sul moto dei corpi dalle masse lontane dell'Universo.

La Prof.a Elisa Brinis Udeschini, valorosa allieva del compianto Prof. Bruno Finzi, parlerà delle recenti applicazioni delle tecniche spinoriali alla teoria della Relatività generale.

Infine il giovane Dottor Mauro Francaviglia, valorosissimo collaboratore del Prof. Galletto, e sicura promessa, esporrà i nuovi metodi e le nuove prospettive matematiche in Relatività generale, che vanno dalle tecniche di geometria e topologia differenziale a quelle di analisi funzionale.

Queste conferenze saranno alternate da comunicazioni da parte di eminenti scienziati italiani che porteranno certamente agli argomenti di questo Convegno un elevato contributo dei loro studi e delle loro ricerche.

A tutti porgo il più cordiale saluto, coll'augurio che i risultati del Convegno riescano a dimostrare che in questa nostra Italia, patria di Archimede, di Leonardo, di Galileo e di Fermi, il livello della Scienza si mantiene sempre saldo ed elevato e che in questi tempi in cui si tende all'appiattimento dei valori dello spirito, vi è ancora una schiera di aristocratici del pensiero che continua, con appassionata tenacia e in silenzio, la sua opera nello studio e nella ricerca del vero.



CONFERENZE



E. AMALDI

RECENTI PROGRESSI DELL'ESPERIMENTO SULLE ONDE GRAVITAZIONALI DELLA UNIVERSITA' DI ROMA.

1. Le Onde Gravitazionali.

La espressione onda gravitazionale figura per la prima volta in un lavoro di Albert Einstein apparso nel 1916 [1], ossia circa un anno dopo la pubblicazione dei lavori in cui egli aveva posto le basi della teoria della Relatività Generale. Il punto di partenza del lavoro del 1916 erano le equazioni fondamentali di questa teoria:

$$(1) \quad R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^3} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right)$$

dove T_{ik} è il tensore energia impulso della materia ($T = g^{ik} T_{ik}$), g_{ik} il *tensore metrico* (simmetrico) definito dalla ben nota relazione:

$$(2) \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

e R_{ik} il tensore di Ricci. Questo è una espressione non lineare nei cosiddetti coefficienti di connessione Γ_{ik}^l e le loro derivate prime [2]

$$R_{ik} = \Gamma_{ik,l}^l - \Gamma_{il,k}^l + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l$$

i quali, a loro volta sono combinazioni non lineari delle componenti g_{ik} del tensore metrico e delle loro derivate prime

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{ln} [g_{ni,k} + g_{nk,i} - g_{ik,n}]$$

Da queste osservazioni segue, come è noto, che le equazioni fondamentali della Relatività Generale, sono equazioni del secondo ordine non lineari nelle 10 componenti

$$g_{ik} = g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Nel lavoro del 1916 Einstein affronta il problema di trovare le soluzioni delle

Eq (1) nel caso di *campo debole*; ossia nel caso in cui si può scrivere

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$$

dove

$$g_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è semplicemente il tensore metrico galileiano o di Minkowski, e le deviazioni da questo, h_{ik} , sono ovunque e sempre così piccole rispetto ad 1,

$$|h_{ik}| \ll 1,$$

da poter trascurare i loro quadrati e prodotti. In tal modo le equazioni di Einstein vengono linearizzate e in assenza di sorgenti ($T_{ik} = 0$) e in una opportuna calibratura (gauge) si riducono alla equazione di D'Alembert con velocità di propagazione pari a c . Se si prende la direzione di propagazione lungo l'asse delle x , e ci si limita al caso delle *onde piane*, esse diventano dunque

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha^2}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] h_{ik} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

e quindi

$$h_{ik}(x, t) = h_{ik}(x \pm ct).$$

In un opportuno sistema di riferimento si trova poi che $h_{ik} = 0$ ogni qual volta uno o entrambi gli indici i e k sono eguali a 1 (asse $x \equiv$ direzione di propagazione e/o 0 (asse temporale) cosicché le sole componenti non nulle sono 4 e tali che [3]

$$(3) \quad h_{yz} = +h_{zy}$$

$$(4) \quad h_{yy} = -h_{zz}.$$

In altre parole le onde gravitazionali sono *trasversali* e dotate di *due e due soli stati di polarizzazione*.

Per chiarire queste affermazioni esaminiamo i risultati che ottiene uno sperimentatore che si propone di misurare la distanza fra due punti fermi nel suo sistema di riferimento, *prima* e *dopo* l'arrivo di un'onda del tipo (4) avente la forma di uno scalino (Fig. 1). La misura naturalmente non va fatta usando aste metriche, ma misurando il tempo proprio τ che impiega un segnale luminoso (o più in generale elettromagnetico) per andare da un estremo all'altro

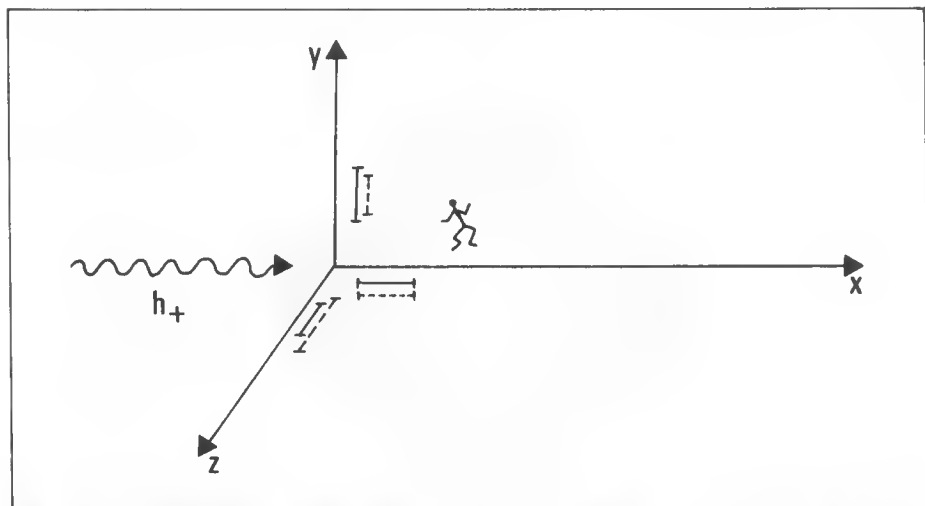


Fig. 1. Per comprendere la natura delle onde gravitazionali, uno sperimentatore misura la distanza fra due punti materiali, prima e dopo l'arrivo dell'onda, disponendo la retta congiungente parallelamente ai tre assi. I segmenti a linea continua e tratteggiata indicano i valori della distanza prima e dopo l'arrivo di un'onda del tipo (4) a forma di scalino.

della distanza l ($= c\tau$).

Il risultato della misura è diverso a seconda dell'orientamento della distanza l rispetto alla direzione di propagazione dell'onda gravitazionale (asse x). Se δl è la variazione subita da l in seguito all'arrivo dell'onda, lo sperimentatore trova

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta l}{l} &= 0 & \text{se } l \text{ è parallelo a } x \\
 \frac{\delta l}{l} &= -\frac{1}{2} h & \text{se } l \text{ è parallelo a } y \\
 \frac{\delta l}{l} &= +\frac{1}{2} h & \text{se } l \text{ è parallelo a } z.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Lo sperimentatore attribuirà le improvvise variazioni di lunghezza subite dalla distanza l a *forze*, le quali, ovviamente, sono trasversali rispetto alla direzione di propagazione, e sono, ovviamente indipendenti dal valore delle masse poste ai due estremi della distanza l . Dopo qualche misura e considerazione giungerà facilmente alla conclusione che si tratta di *forze trasversali del tipo delle forze che provocano le maree* le cui linee di forza sono iperboli aventi per asintoti gli assi y e z (Fig. 2).

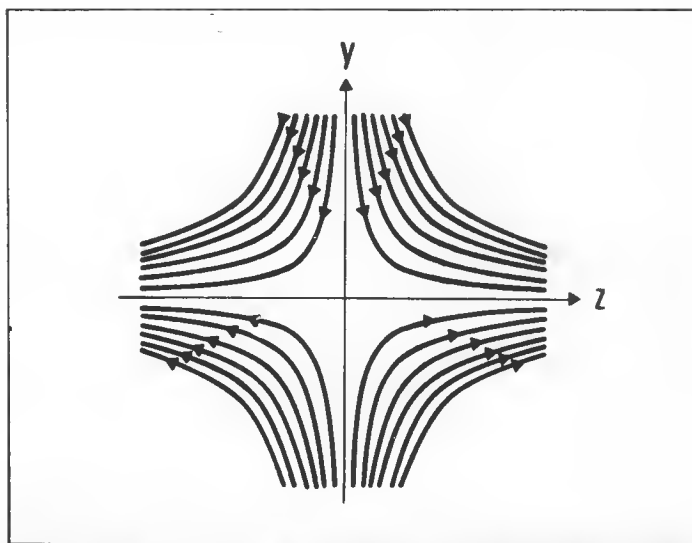


Fig. 2. Linee di forza di una onda gravitazionale nello stato di polarizzazione (4).

Se l'onda gravitazionale, invece di essere a scalino, è un'onda, per esempio, sinusoidale, le linee di forza della Fig. 2 cambiano di verso ad ogni mezzo periodo.

Le linee di forza di un'onda nello stato di polarizzazione (3) sono rappresentate da un grafico come quello della Fig. 2 ma ruotato di 45° attorno alla direzione di propagazione (ossia attorno alla normale al piano della figura).

Queste osservazioni preliminari mostrano molto chiaramente che esistono varie analogie ma anche alcune differenze sostanziali fra onde elettromagnetiche e onde gravitazionali.

Tali analogie e differenze ci possono essere molto utili per comprendere, per esempio, la emissione di queste onde.

Il più semplice sistema di cariche elettriche che emette onde e.m. è notoriamente un dipolo elettrico che nella Fig. 3a è schematizzato come due cariche q di *segno opposto* possedute da due corpiccioli fissati agli estremi di una molla. L'energia irradiata è determinata dal quadrato della *derivata seconda* rispetto al tempo $\ddot{\mathbf{d}}_{el}$ del momento elettrico di dipolo del sistema

$$(6a) \quad \ddot{\mathbf{d}}_{el} = \sum_{i=1,2} q_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

dove $\ddot{\mathbf{r}}_i$ ($i = 1, 2$) è il vettore che individua la posizione della carica elettrica i -esima ($q_1 = q, q_2 = -q$).

Passiamo ora alle onde gravitazionali. Poiché le masse gravitazionali sono tutte

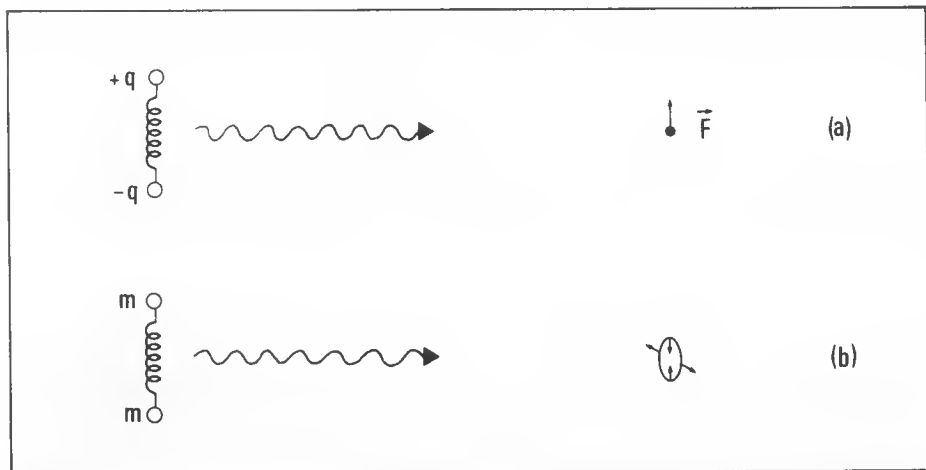


Fig. 3. (a) Il sistema di cariche elettriche più semplice che emette onde elettromagnetiche è un dipolo. (b) Il sistema di masse gravitazionali più semplice che emette onde gravitazionali è un quadrupolo.

dello stesso segno, il sistema più semplice che possiamo considerare in questo caso è quello della Fig. 3b per cui si ha, in analogia con la (6a),

$$(6b) \quad \vec{d}_g = \sum_{i=1,2} m_i \vec{r}_i,$$

la cui derivata prima rispetto al tempo si identifica con la quantità di moto del sistema che, se questo è isolato, è una costante del moto. Pertanto si ha sempre $\vec{d}_g = 0$, e il multipolo di ordine più basso che da una emissione di onde gravitazionali è necessariamente il quadruplo meccanico del sistema.

L'intensità di una onda piana, cioè l'energia che essa trasporta attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo è data, in generale, dalla espressione [3]

$$(7) \quad w = \frac{c^3}{16\pi G} \left[\dot{h}_{yz}^2 + \frac{1}{4}(\dot{h}_{yy} - \dot{h}_{zz})^2 \right]$$

dove

$$G = 6,670 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g} \times \text{s}^2$$

è la costante gravitazionale.

Se la sorgente è un quadrupolo puro, di momento (di quadrupolo)

$$(8) \quad D_{\alpha\beta} = \int \rho (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma^2) dV,$$

(ρ = densità di massa della sorgente) posto a grande distanza r , la intensità (7) può essere scritta nella forma

$$(9) \quad w = \frac{G}{36\pi c^3} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\ddot{D}_{yy}^2 - \ddot{D}_{zz}^2}{2} + \ddot{D}_{yz}^2 \right].$$

Integrando questa espressione su tutto l'angolo solido si ottiene la energia persa dal sistema nell'unità di tempo per irraggiamento di onde gravitazionali

$$(10) \quad -\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2$$

già considerata da Einstein nel suo primo lavoro e discussa in modo completo nel suo secondo e ultimo lavoro sulle onde gravitazionali [4]. Come si vede dalle (9) e (10) l'energia irraggiata è determinata dal quadrato della derivata terza rispetto al tempo del momento di quadrupolo.

Dalla (10) segue immediatamente che l'irraggiamento gravitazionale da parte di qualsiasi sistema meccanico costruito o costruibile oggi giorno dall'uomo è così piccolo da non poter essere in alcun modo osservato [5].

Per la osservazione di onde gravitazionali si è quindi costretti a far ricorso a *sorgenti astronomiche*. Queste possono essere divise in due categorie:

(a) *sorgenti periodiche*, come una stella doppia con orbite fortemente eccentriche o una stella ruotante (per esempio una pulsar) purché dotata di un momento di quadruplo meccanico non nullo;

(b) *eventi catastrofici* come per esempio una supernova, o più in generale, un collasso gravitazionale. Questo ha luogo, in generale, quando il combustibile nucleare è esaurito, le forze gravitazionali prevalgono e la massa implode con emissione di onde elettromagnetiche (luce, onde radio), neutrini e onde gravitazionali.

L'irraggiamento da parte di queste diverse sorgenti è stato calcolato da vari autori, come Ruffini e Wheeler, Ferrari e Ruffini, Thorne e collaboratori e altri.

Un evento tipico può essere descritto molto schematicamente nel seguente modo. Una massa solare viene convertita in onde gravitazionali in un tempo τ_g dell'ordine di 20 millisecondi. Il suo spettro di frequenza si estende quindi su di una banda di $\sim 10^3$ Hz. Se questa energia è emessa isotropicamente in un evento che ha luogo al centro della nostra Galassia, la densità di energia spettrale che giunge sulla Terra vale

$$F(\nu) = 1.5 \times 10^5 \text{ erg/cm}^2 \times \text{Hz} = 1.5 \text{ G.P.U.}$$

dove $1 \text{ G.P.U.} = 10^5 \text{ erg/cm}^2 \times \text{Hz}$ è una unità comoda in molte considerazioni astrofisiche (G.P.U. = Gravitationalwave Pulse Unit).

Questa energia è tutt'altro che piccola come si può vedere confrontandola con l'intensità dell'energia solare. Questa, al di sopra dell'atmosfera, ammonta a

$$\epsilon_{\text{solare}} = 1.4 \times 10^6 \text{ erg/cm}^2 \times \text{s}$$

mentre l'intensità dell'evento gravitazionale descritto sopra vale

$$\epsilon_{gr} = F(\nu) \frac{\Delta\nu}{\tau_g} = 1.5 \times 10^5 \frac{10^3 \text{ Hz}}{20 \text{ ms}} = 0.75 \times 10^{10} \text{ erg/cm}^2 \times \text{s}$$

cioè 5000 volte maggiore della precedente.

Il Sole, naturalmente, è una sorgente di energia permanente mentre il collasso gravitazionale sopra descritto è un evento catastrofico che dura 20 millisecondi. La maggior differenza fra i due casi è il diverso assorbimento. La radiazione solare è assorbita totalmente o quasi da un sottile foglio di carta o altro materiale nero mentre un'onda gravitazionale è assorbita pochissimo: se essa attraversa la Terra perde solo la frazione 4×10^{-18} della sua energia, e se attraversa il Sole perde solo 7×10^{-14} della sua energia.

L'Universo, dunque, è completamente trasparente alle onde gravitazionali.

Da queste osservazioni, segue che l'interazione fra una onda gravitazionale e qualsiasi rivelatore è estremamente debole, circostanza che spiega la difficoltà di rivelare onde gravitazionali. Per chiarire questo punto partiamo dalla (7) scritta per una onda non polarizzata di ampiezza $h = (h_{yz}^2 + h_{yy}^2)^{1/2}$ e deduciamo la relazione fra h stesso e la densità spettrale di energia. Si trova facilmente (in unità c.g.s) [6]

$$(11a) \quad h^2 = \frac{32\pi G}{c^3} \frac{1}{\omega^2 \tau_g^2} F(\nu) = 0.63 \times 10^{-38} \frac{F(\nu)}{(\nu \tau_g)^2}$$

da cui segue che per $F(\nu) = 1.5 \text{ G.P.U.}$, $\nu = 1500 \text{ Hz}$ e $\tau_g = 20 \text{ ms}$,

$$(11b) \quad h \simeq 0.1 \cdot 10^{-17} \text{ (centro della Galassia)}$$

e, ricordando le (5),

$$\left| \frac{\delta l}{l} \right| = \frac{1}{2} h \sim 0.5 \times 10^{-18}$$

che è una variazione di lunghezza non facile da misurare.

La situazione è in realtà ancora peggiore in quanto si ritiene oggi, che i collassi gravitazionali che hanno luogo nella nostra Galassia siano molto rari: dell'ordine di *uno ogni 10 anni*. Per avere una frequenza statistica di eventi dell'ordine di uno ogni qualche giorno è necessario riuscire ad osservare collassi che hanno luogo anche nel cluster della Vergine. Ma ciò comporta di poter rivelare onde

gravitazionali di ampiezza 10^3 volte minore della (11), cioè

$$(12) \quad h \sim 10^{-21} \text{ (ammasso della Vergine).}$$

2. I rivelatori alla Weber.

Nel 1956 Pirani [7] fece l'osservazione che una determinazione sperimentale della accelerazione relativa di due masse di prova in caduta libera, avrebbe fornito una misura del tensore di Riemann. Qualche anno dopo Bondi [8] e Weber [9] notarono che un oscillatore armonico costituito da due masse di prova collegate da una molla potrebbe servire, almeno in linea di principio come rivelatore di onde gravitazionali. Subito dopo Weber cominciò a dedicare uno sforzo straordinario per sviluppare antenne gravitazionali basate su questo principio.

Dopo nove anni di lavoro, egli pubblicò nel 1969 [10], di aver osservato alcune coincidenze fra due antenne poste a mille chilometri di distanza, una all'Università del Maryland, l'altra all'Argonne National Laboratory vicino a Chicago. Immediatamente vari gruppi di sperimentatori in USSR, Europa, USA e Giappone cominciarono a fare esperimenti simili ma nessuno di essi confermò i risultati ottenuti da Weber. Ciò nonostante la ricerca delle onde gravitazionali non è cessata in quanto vi sono fondate ragioni per ritenere che la osservazione delle onde gravitazionali emesse dalle sorgenti astronomiche di cui si è parlato sopra, diventi senz'altro possibile a condizione di fare uso di rivelatori molto più sensibili di quelli della prima generazione.

La maggior parte dei rivelatori della seconda generazione sono qualitativamente simili a quelli di Weber da cui differiscono per la temperatura della antenna, il tipo di trasduttore, la protezione dai disturbi, gli algoritmi usati nell'analisi dei dati, e così via.

Una antenna alla Weber consiste di un cilindro metallico, di solito alluminio, sospeso nel vuoto a mezzo di un filo che lo abbraccia nel piano equatoriale (Fig. 4), che si mette a vibrare nel suo modo longitudinale fondamentale ogni qual volta viene investito da un fiotto di radiazione gravitazionale che possiede, con ampiezza non trascurabile, una componente di Fourier di frequenza

$$\nu_g = \frac{1}{T_g} = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{v_s}{2L}$$

dove L è la lunghezza della sbarra e v_s la velocità del suono nel materiale di cui essa è costituita. Se indichiamo $\xi(t)$ lo spostamento subito da uno degli estremi della sbarra in seguito all'arrivo di un fiotto gravitazione di durata $\tau_g \ll \tau_0 = Q/\omega_0$ la cui componente di frequenza $\nu_g = \omega_0/2\pi$ ha ampiezza h , si trova facilmente che

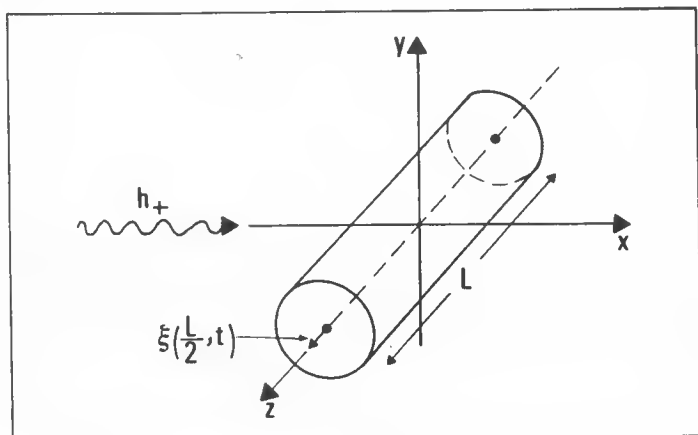


Fig. 4. Antenna della Weber.

$$(13) \quad \xi(t) = \frac{v_s}{\pi} (h\tau_g) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \sin \omega_0 t.$$

Da questa espressione si vede subito che il tempo di smorzamento dell'antenna τ_0 deve essere molto grande per dare il tempo per eseguire una buona misura dell'ampiezza iniziale ($h\tau_g$).

Per poter misurare l'ampiezza di $\xi(t)$ per $t = 0$ è necessario un *trasduttore*, ossia un sistema che trasformi $\xi(t)$ (o una sua derivata rispetto al tempo o alla variabile z lungo l'asse del cilindro) in un segnale elettrico, composto in generale da una tensione $V(t)$ e una corrente $I(t)$. Il trasduttore più semplice consiste in un cristallo (o ceramica) piezoelettrica inserita in una fenditura al centro della sbarra (Fig. 4), la cui uscita si riduce a una tensione $V(t)$ (la corrente d'uscita è praticamente nulla: $I(t) \approx 0$) proporzionale alla tensione meccanica applicata alle facce del cristallo. Poiché questa al centro della sbarra è proporzionale, al valore $\xi(t)$ dello spostamento dell'estremo della sbarra stessa, si può scrivere, come equazione caratteristica del trasduttore,

$$(14) \quad V(t) = \alpha \cdot \xi(t)$$

dove α è la cosiddetta costante di accoppiamento. Un tipico valore di α è 10^6 volt/cm, cosicché con una sbarra di lunghezza $L \sim 1.5$ m che riceve 1 G.P.U. ($\xi_{\max} \sim 1.7 \times 10^{-14}$ cm) si ha $V_{\max} \approx 17$ nV che si misurano abbastanza facilmente. Per un evento della stessa entità che abbia luogo nel Cluster della Vergine $V_{\max} \sim 17 \text{ nV} / \sqrt{10^6} \approx 0,02$ nV che, attualmente è oltre il limite misurabile.

Se M è la massa della sbarra, la energia depositata in essa dal fiotto di radiazione gravitazionale è data da

$$E_{gr} = \frac{1}{2} \frac{M}{2} \omega_0^2 \xi_{\max}^2 = \frac{M}{4} \omega_0^2 \left[\frac{v_s}{\pi} (h\tau_g) \right]^2,$$

che, con $M = 1500$ kg ed $F(\nu) \approx 1$ G.P.U., da

$$(15) \quad E_{gr} \approx 2.2 \times 10^{-15} \text{ erg.}$$

Si noti che per avere questa modesta energia nella sbarra si è partiti da un collasso gravitazionale in cui sono stati emessi $\sim 10^{53}$ erg. Questi hanno dato sulla superficie della Terra $F(\nu) \sim 10^5 \text{ erg/cm}^2 \times \text{Hz}$ (con $\Delta\nu \approx 1$ kHz) che a loro volta depositano nella sbarra $\sim 10^{-15}$ erg.

Il modo fondamentale di una sbarra (ad alto Q) è un vero e proprio oscillatore (con debole smorzamento) la cui *energia media* è data da

$$(16) \quad \langle E_B \rangle = \frac{1}{2} h\nu_0 + \frac{h\nu_0}{\frac{h\nu_0}{e^{kT} - 1}},$$

che per $\nu_0 \approx 1 - 2$ kHz e

$$T \gg \frac{h\nu_0}{k} = 10^{-7} \text{ K}$$

si riduce a

$$\langle E_B \rangle \approx kT = 1.38 \times 10^{-16} T \text{ erg.}$$

Ciò significa che a $T = 1\text{ K}$ l'oscillatore si comporta come un oscillatore classico dato che è in uno stato quantistico $n \approx 10^7$.

Per $T = 300 \text{ K}$, $\langle E_B \rangle = 4 \times 10^{-14} \text{ erg}$, cioè una energia *20 volte maggiore* della (15), per $T = 1\text{ K}$: $\langle E_B \rangle = 1.4 \times 10^{-16} \text{ erg}$, cioè una energia *circa 14 volte più piccola* della (15). Questo esempio mostra chiaramente l'importanza di usare antenne criogeniche, cioè antenne che lavorano a qualche grado Kelvin.

3. Il rumore di fondo e la raccolta dei dati.

E' ora chiaro che uno dei problemi più importanti e delicati è quello di estrarre una piccola variazione di $\xi(t)$ prodotta da un fiotto di radiazione gravitazionale, da un fondo dovuto alla sovrapposizione di «rumori» di diversa origine: il moto browniano della sbarra, il rumore elettronico del trasduttore e del preamplificatore (V_N e I_N) e il rumore risonante (o di back-reaction) dovuto alla eccitazione della sbarra da parte della corrente di rumore I_N esistente all'ingresso del preamplificatore. Discutiamo il caso particolare del moto browniano della sbarra. Il

suo modo di oscillazione longitudinale fondamentale, a causa della agitazione termica, oscilla continuamente con la sua frequenza angolare ω_0 , e ampiezza e fase che variano in modo casuale. Ne segue che a causa del moto browniano, e in assenza di disturbi e di radiazione gravitazionale, la tensione di uscita può essere rappresentata come funzione del tempo t , dalla espressione

$$V(t) = r(t) e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]}$$

dove $r(t)$ e $\varphi(t)$ variano casualmente. Per conoscere in modo completo il vettore nel piano complesso $V(t)$ è quindi necessario conoscere le due funzioni $r(t)$ e $\varphi(t)$, e ciò che è lo stesso, le proiezioni di $V(t)$ su due assi cartesiani nel piano complesso.

Ciò si ottiene inserendo nella catena elettronica (Fig. 5) due rivelatori sensibili alla fase (Phase Sensitive Detector: PSD) in quadratura fra loro, pilotati da un oscillatore estremamente stabile di frequenza eguale a quella del modo fondamentale della antenna ($\nu_0 = \omega_0/2\pi$).

Le operazioni eseguite dai PSD sul segnale $V(t)$ applicato al loro ingresso sono

$$x(t) = A \int_{-\infty}^t V(t') e^{-\frac{t-t'}{t_0}} \text{segno} \{\cos \omega_0 t'\} dt'$$

(17)

$$y(t) = A \int_{-\infty}^t V(t') e^{-\frac{t-t'}{t_0}} \text{segno} \{\sin \omega_0 t'\} dt'.$$

dove A è l'amplificazione totale dell'elettronica e t_0 un tempo di integrazione legato alla larghezza $\Delta\nu$ della banda dei PSD dalla relazione

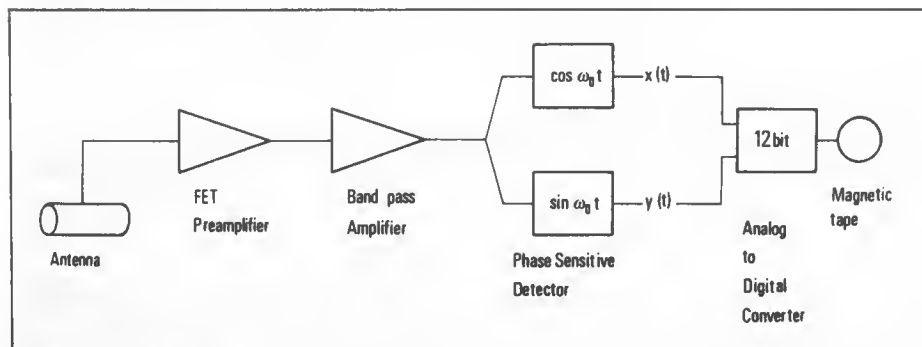


Fig. 5. Catena elettronica.

$$(18) \quad \Delta\nu = \frac{1}{t_0}.$$

Le uscite (17) dei PSD vengono inviate a un convertitore analogico-digitale e infine vengono registrate su nastro magnetico a intervalli regolari di tempo Δt (intervallo di tempo di campionatura).

Il sistema nel suo complesso è dunque caratterizzato da tre tempi: τ_0 (tempo di smorzamento della antenna), t_0 (tempo di integrazione dei PSD), Δt (tempo di campionatura).

τ_0 deve essere molto più lungo di t_0 e Δt ; t_0 viene scelto dal progettista dell'esperimento, Δt non deve essere preso più breve di t_0 se non si vogliono introdurre correlazioni non necessarie fra due misure successive. D'altra parte se $\Delta t > t_0$ si butta via una parte della informazione e pertanto conviene adottare la regola

$$(19) \quad \Delta t = t_0.$$

E' stato dimostrato che le variabili $x(t)$ e $y(t)$ sono *variabili stocastiche* di valore medio nullo e varianza [11]

$$(20) \quad \sigma_0^2 = R(0)$$

dove

$$R(\tau) = R_{xx}(\tau) = R_{yy}(\tau)$$

e

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t' + \tau) x(t') dt'$$

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t' + \tau) y(t') dt'$$

sono le funzioni di *autocorrelazione*.

E' anche facile dimostrare che, con ottima approssimazione, si ha

$$(21) \quad R(\tau) = V_{nb}^2 e^{-\frac{\tau}{2\tau_0}} + \frac{S_0}{t_0} e^{-\tau/t_0}$$

dove V_{nb} è il rumore a banda stretta (narrow-band) ed $S_0 \Delta\nu$ il rumore a banda larga (wide-band) del sistema nel suo complesso. Nello scrivere la (21) si è tenuto conto della (18). Il rumore browniano è contenuto in V_{nb} , insieme a una parte del

rumore risonante, mentre S_0 contiene il rumore di ingresso dell'elettronica oltre al resto del rumore risonante.

Se ora definiamo la variabile

$$(22) \quad r^2(t) = x^2(t) + y^2(t),$$

è chiaro che la sua funzione di distribuzione sarà data da

$$(23) \quad F(r^2) = \frac{1}{2\sigma_0^2} e^{-r^2/2\sigma_0^2}.$$

Dai valori misurati di

$$x(t), x(t + \Delta t), \dots x(t + n \Delta t) \dots$$

$$y(t), y(t + \Delta t), \dots y(t + n \Delta t) \dots$$

si calcolano i valori di

$$r^2(t), r^2(t + \Delta t), \dots r^2(t + n \Delta t) \dots$$

e si costruisce la corrispondente funzione di distribuzione statistica *sperimentale*. Questa, in assenza di disturbi e/o segnali gravitazionali, in un grafico semilogaritmico in funzione di r^2 , è data, secondo la (23), da una retta la cui pendenza fornisce il *valore sperimentale* di σ_0^2 . Se l'antenna funziona in modo *perfetto* questo valore *misurato* deve coincidere con quello calcolato a mezzo delle (20) e (21) partendo dai parametri dell'antenna (M, ω_0, τ_0, T) e da misure dirette dei rumori di diversa origine.

I segnali gravitazionali e i disturbi di varia origine si presentano come deviazioni della legge statistica (23).

Spesso si esprime la varianza $\sigma_0^2 = \langle r^2 \rangle$ in termini di una temperatura T_e , detta *temperatura equivalente*, tale che il corrispondente rumore browniano risulti eguale a σ_0^2 : [12]

$$(24) \quad \sigma_0^2 = \alpha^2 \frac{2kT_e}{M\omega_0^2}.$$

Si noti che la costante d'accoppiamento α (vedi [14]) serve a convertire l'ampiezza della oscillazione degli estremi della sbarra in volt. Si può dimostrare che [13]

$$(25) \quad T_e = T \left(1 + \frac{\beta Q}{T} \frac{T_r}{2\lambda} \right)$$

dove

$$(25) \quad T_{tr} = \frac{V_N I_N}{k}$$

è la temperatura del trasduttore + elettronica, e

$$\lambda = \omega_0 C_2 \frac{V_N}{I_N},$$

dove C_2 è la capacità del trasduttore.

4. Le coincidenze e gli algoritmi.

La distinzione fra rumori di fondo e disturbi di varia origine è che i primi possono essere *trattati matematicamente*, come si è cominciato a mostrare nel paragrafo precedente e si mostrerà meglio nel seguito di questo paragrafo, mentre ciò *non è possibile* per i disturbi. Questi ultimi possono essere ridotti proteggendo la antenna da ogni disturbo meccanico, elettrico ecc.; quelli che restano sempre possono essere eliminati solo osservando le coincidenze fra due o più stazioni poste a grande distanza fra loro.

La trattazione matematica dei rumori di fondo può essere considerevolmente migliorata usando per l'analisi dei dati un algoritmo più potente dell'*algoritmo diretto* r^2 definito a mezzo della (22).

Una vasta categoria di algoritmi è quella degli *algoritmi predittivi* [11], [14] in cui si fa uso della innovazione

$$(26) \quad \rho_i^2 = [x(t) - x_{pi}(t)]^2 + [y(t) - y_{pi}(t)]^2,$$

dove $x_{pi}(t)$, $y_{pi}(t)$ sono i *valori previsti* in base ad un prescelto procedimento statistico i . L'algoritmo predittivo di ordine zero (Z.O.P.) consiste nel porre nella (26)

$$x_{p0}(t) = x(t - \Delta t)$$

$$y_{p0}(t) = y(t - \Delta t)$$

ossia prendere come valore previsto al tempo t il valore misurato al tempo $t - \Delta t$. L'algoritmo predittivo del primo ordine (F.O.P.) usa la migliore valutazione statistica $x_{p1}(t)$, $y_{p1}(t)$ basata sulla sola ultima misura. Questa è data da [11], [14]

$$x_{p1}(t) = \frac{R(\Delta t)}{R(0)} \cdot x(t - \Delta t)$$

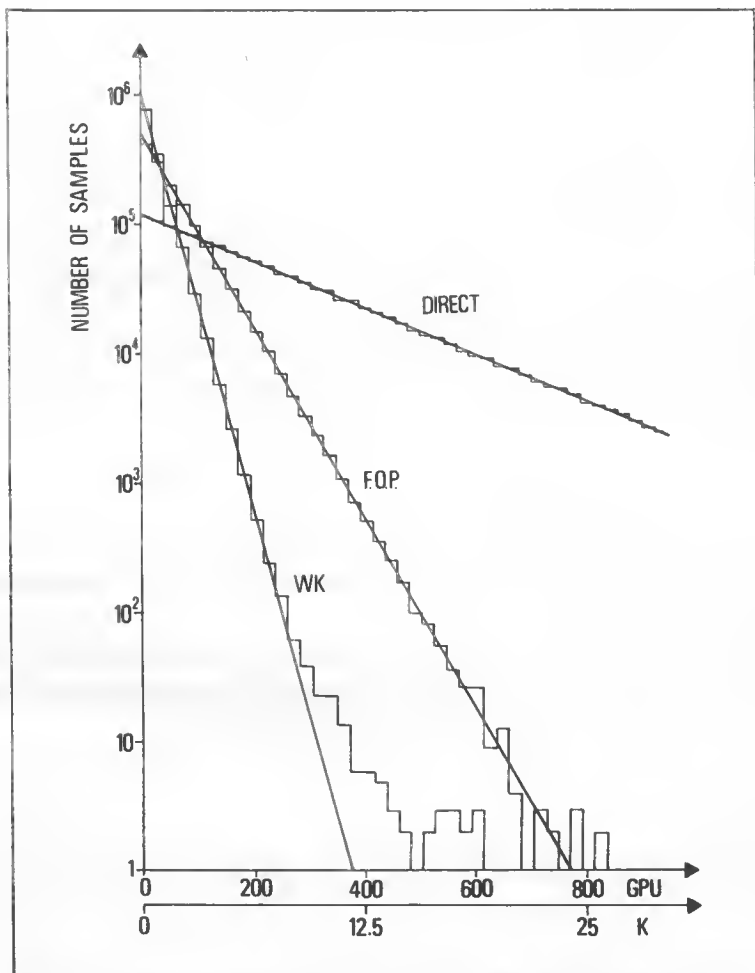


Fig. 6. Distribuzioni statistiche di r^2 , ρ_F^2 e ρ_W^2 osservate con una antenna di prova di $M = 24$ kg ($\nu_0 = 7523$ Hz).

$$y_{pl}(t) = \frac{R(\Delta t)}{R(0)} \cdot y(t - \Delta t).$$

L'algoritmo più raffinato di questa categoria è quello di Wiener-Kolmogoroff che fa uso di tutti i dati passati e di tutti i dati futuri rispetto all'istante t in cui si fa la previsione [11], [14], [15].

La proprietà più importante di tutti questi algoritmi è che hanno una distribuzione statistica simile alla (23), cioè

$$(27a) \quad F(\rho_i^2) = \frac{1}{2\sigma_i^2} e^{-\rho_i^2/2\sigma_i^2}$$

con

$$(27b) \quad \frac{\sigma_i^2}{K_i} < \sigma_0^2,$$

dove K_i è un fattore di normalizzazione [14] che tiene conto della forma dell'impulso, determinata dalla elettronica usata.

E' molto utile, come vedremo nel seguito, esprimere σ_i^2/K_i in termini di una temperatura efficace $T_{\text{eff}}^{(i)}$ tale che il corrispondente rumore browniano risulti eguale a σ_i^2/K_i :

$$(28) \quad \frac{\sigma_i^2}{K_i} = \alpha^2 \frac{2kT_{\text{eff}}^{(i)}}{M\omega_0^2}$$

formalmente simile alla (24) ma che tien conto, oltre che della strumentazione, anche dell'algoritmo usato.

La Fig. 6 mostra i risultati sperimentali ottenuti dal gruppo di Roma con una antenna di $M = 24$ kg e $\nu_0 = 7523$ Hz. Essi mostrano in modo evidente la validità di entrambe le relazioni (27).

5. La sensibilità di una antenna risonante [16].

La sensibilità di una antenna risonante è espressa dal rapporto segnale/rumore (SNR) il quale può venire precisato a mezzo della definizione

$$(29) \quad \text{SNR} = \frac{\rho_{ig}^2}{2\sigma_i^2}$$

dove ρ_{ig}^2 è il segnale dovuto ad un fiotto di radiazione gravitazionale ottenuto applicando l'algoritmo i ai dati dedotti, con lo stesso algoritmo, da un rivelatore con rumori di varianza σ_i^2 .

Il rapporto (29) dipende sempre da: (a) il rumore a banda larga $S_0((\text{nV})^2/\text{Hz})$ del trasduttore + elettronica; (b) la massa M della sbarra; (c) il parametro composito,

$$(30) \quad \frac{\beta Q}{T}$$

già incontrato nella (24); e (d) l'algoritmo impiegato. Come al solito

$$\beta = \frac{\text{energia nel trasduttore}}{\text{energia nella antenna}}.$$

Un aumento della sensibilità richiede sempre una diminuzione di S_0 , un aumento di M e del parametro composito (30) e la scelta dell'algoritmo che rende massimo il rapporto SNR (29).

Si può facilmente dimostrare che la *sensibilità strumentale* definita come la minima densità spettrale di energia osservabile è data da

$$(31) \quad F(\nu) \geq \frac{kT_{\text{eff}}^{(i)}}{\sigma_{GW}}$$

dove

$$(32) \quad \sigma_{GW} = \frac{8}{\pi} \frac{G}{c} \left(\frac{v_s}{c} \right)^2 M$$

è la sezione d'urto dell'antenna.

Introducendo i valori delle costanti si trova per sbarre di alluminio a $T \sim 4.2$ ($v_s = 5.400$ m/s)

$$(33) \quad F(\nu) = 782 \frac{T_{\text{eff}}^{(i)}}{M} \text{ G.P.U.}$$

6. L'esperimento del gruppo di Roma [17].

Questo è stato iniziato nel 1971 come una collaborazione di tre Università: Stanford (California), Baton Rouge (Louisiana) e Roma. I tre gruppi si sono proposti come meta finale, di far funzionare in coincidenza (in ciascuna delle tre stazioni) almeno una antenna di massa $M = 5000$ kg, mantenuta a bassa temperatura; inizialmente $T \sim 4.2$ K, ma nel seguito temperature molto più basse: $T \sim 10^{-2}$ K, forse anche $T \sim 10^{-3}$ K. I tre gruppi procedono in maniera autonoma ma si scambiano tutte le informazioni di carattere scientifico e tecnico.

I capigruppo sono: Fairbank, Hamilton e Pizzella.

Il gruppo di Roma comprende i seguenti ricercatori e tecnici di vari laboratori:

Istituto di Fisica dell'Università di Roma: E. Amaldi, C. Cosmelli, S. Frasca, I. Modena, G. V. Pallottino, G. Pizzella, F. Ricci, E. Serrani;

Laboratorio Plasma nello Spazio del CNR (Roma): P. Bonifazi, F. Bordoni, V. Ferrari, F. Fuligni, V. Iafolla, G. Martinelli, P. Napoleoni, B. Pavan, S. Ugazio, G. Vannaroni;

Laboratorio di Elettronica dello Stato Solido del CNR (Roma): S. Barbanera, F. Carelli, G. L. Romani;

Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris (Torino): S. Leschiutta.

Leschiutta partecipa alla ricerca fornendo la strumentazione e la competenza per le misure del tempo universale (U.T.) necessarie per la determinazione delle coincidenze fra le varie stazioni.

I ricercatori del Laboratorio dello Stato Solido provvedono, sotto la guida di I. Modena, allo sviluppo di trasduttori avanzati che impiegano SQUID (Superconducting Quantum Interferometric Device). L'elettronica è curata da Pallottino e Bordoni con l'aiuto di vari ricercatori dell'Università e del Laboratorio del Plasma nello Spazio.

Il gruppo di Roma ha deciso, fin da principio, di procedere per passi successivi verso la meta finale. Esso pertanto ha costruito:

(a) tre antenne ciogeniche di prova di $M = 25 - 30$ kg poste nello scantinato dell'Istituto di Fisica dell'Università di cui si occupa in modo particolare Cosmelli. Esse sono state usate sin da principio per mettere a punto varie tecniche di sospensione, per provare vari tipi di trasduttori o l'elettronica e così via.

(b) Una antenna intermedia di $M = 390$ kg posta in una sala del Laboratorio del Plasma nello Spazio a Frascati di cui si occupa in modo particolare Giovanardi.

In occasione del suo primo raffreddamento, avvenuto nel luglio 1977, sono stati misurati tutti i parametri della antenna a 4.2 K.

Nel giugno-luglio 1978 questa stessa antenna è stata mantenuta in funzionamento per 39 giorni consecutivi eseguendo misure di cui parlerò fra poco [18].

(c) Una antenna grande di $M = 5000$ kg che, alla fine del 1979, verrà trasportata a Ginevra ove sarà ospitata in un locale gentilmente messo a disposizione del CERN.

La Fig. 7 mostra la distribuzione osservata dell'algoritmo di Wiener-Kolmogoroff ρ^2 in luglio 1978, in 19 giorni consecutivi di misure con l'antenna intermedia: $M = 390$ kg. La retta corrisponde a $T_{\text{eff}}^W = 1.53$ K che applicando la (33) da una sensibilità di 3 G.P.U. o se si preferisce $h \simeq \sqrt{2} \times 0.56 \times 10^{-17} = 0.8 \times 10^{-17}$. Le temperature efficaci ottenute negli esperimenti precedenti di maggior sensibilità sono:

$T_{\text{eff}} = 36$ K: collaborazione Bell-Telephone-Rochester [19]

$T_{\text{eff}} = 7.3$ K: gruppo di Monaco [20].

Si noti inoltre che il valore $T_{\text{eff}}^W = 1.53$ K è superiore di 0.17 K al corrispondente valore calcolato.

La deviazione della distribuzione statistica osservata dalla retta della Fig. 7 è dovuta a disturbi che è ora necessario eliminare o per lo meno ridurre.

Allo scopo di prevedere quello che potrà essere l'effetto delle coincidenze con una altra antenna identica a quella di Frascati ma posta a grande distanza, abbiamo fatto le coincidenze fra l'uscita della nostra antenna e l'uscita stessa spostata di un intervallo di tempo pari a 500 secondi. Il calcolo è stato fatto con l'algoritmo ZOP che aveva dato il valore $T_{\text{eff}}^Z = 1.74$ K un poco superiore a T_{eff}^W .

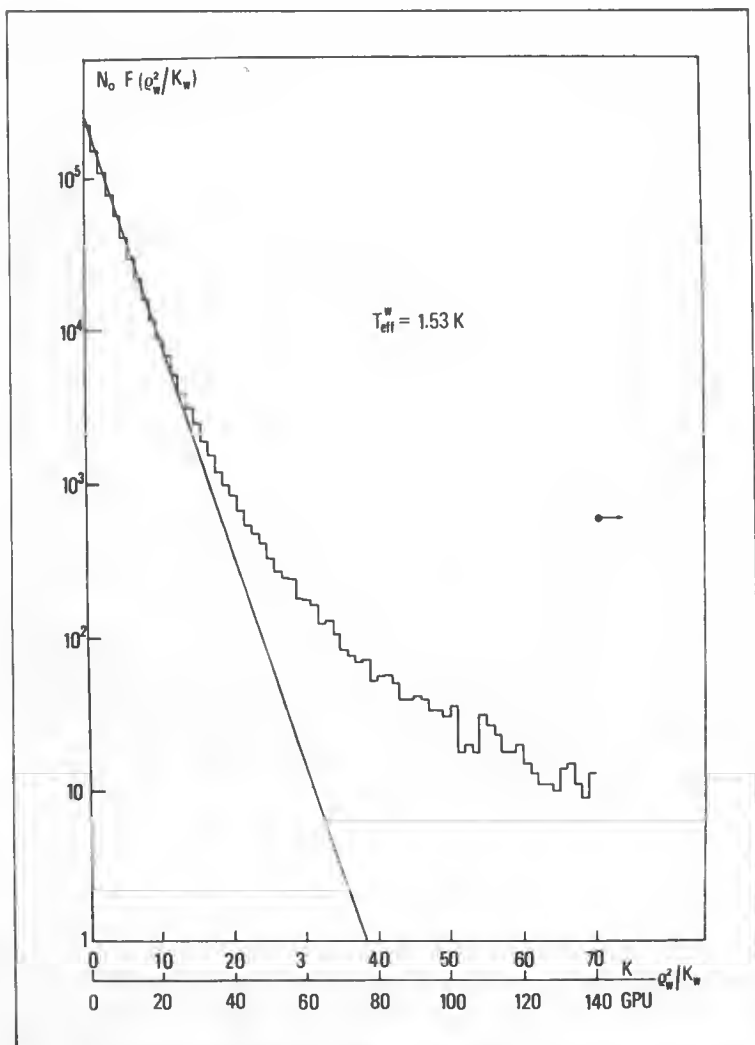


Fig. 7. Distribuzione statistica osservata in luglio 1978 con l'antenna di $M = 390$ kg, $\nu_0 = 1795$ Hz a $T = 4.2$ K.

I risultati così ottenuti (Fig. 8) mostrano oltre a una considerevole riduzione dei disturbi anche un abbassamento della temperatura efficace di un fattore due come era da attendersi.

Attualmente stiamo cercando di introdurre alcuni miglioramenti nell'antenna intermedia che dovrebbero fare abbassare il valore di T_{eff}^w di circa un fattore 2. Modena e collaboratori stanno sviluppando un nuovo tipo di trasduttore (detto PiezoSQUID) che dovrebbe fare abbassare T_{eff}^w di un fattore 10.

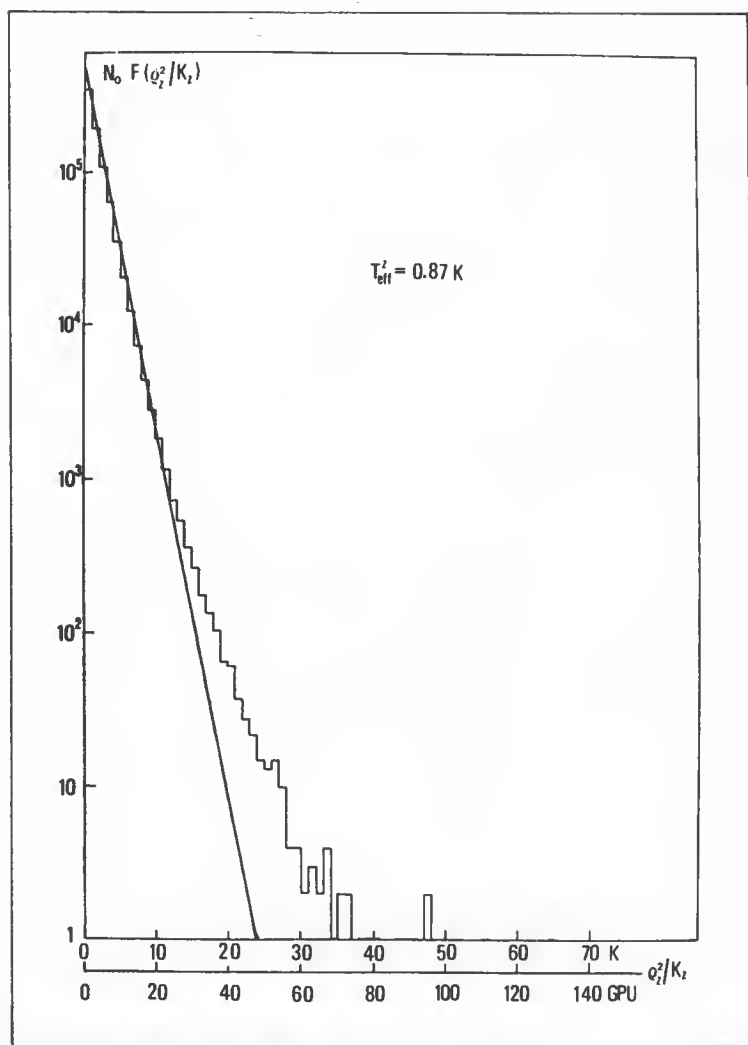


Fig. 8. Distribuzione statistica delle «coincidenze artificiali» fra l'uscita della antenna intermedia (algoritmo ZOP; in singole $T_{\text{eff}}^Z = 1.74 \text{ K}$) e la stessa uscita ritardata di 500 secondi.

Contemporaneamente cominciamo le operazioni necessarie per mettere in funzione a Ginevra entro il 1979 la sbarra da 5000 kg la quale dovrebbe permetterci di guadagnare in sensibilità un ulteriore fattore $5000/390 \sim 12$.

Come si vede da queste osservazioni noi speriamo di guadagnare circa un fattore 100 in sensibilità in un tempo relativamente breve.

Il cammino da percorrere è però piuttosto lungo e prevedibilmente faticoso

ed esposto a difficoltà crescenti, se si vuol giungere al valore $h \sim 10^{-21}$ previsto per collassi che hanno luogo nell'ammasso della Vergine.

BIBLIOGRAPHY.

- [1] EINSTEIN A.: König: Preuss. Akad. der Wissenschaften, Sitzungsberichte, Erster Halbband, 688 (1916).
- [2] Ricordiamo che l'indice 1 dopo la virgola significa derivata ordinaria rispetto a x^1 .
- [3] Vedi, per esempio: L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITS: *Teoria dei Campi*, Editori Riuniti, Roma (1976).
- [4] EINSTEIN A.: König: Preuss. Akad. der Wissenschaften, Sitzungsberichte, Erster Halbband, 154 (1918).
- [5] Questo punto è stato discusso in modo particolare da: E. S. EDDINGTON: Proc. Roy. Soc. A 102, 268 (1923).
- [6] Le (11) valgono per un'onda gravitazionale polarizzata con un asintoto della Fig. 2 parallelo all'asse del cilindro e incidente lungo una direzione giacente nel suo piano equatoriale. Se $F(\nu)$ è dovuta ad un'onda non polarizzata, a secondo membro della (11a) bisogna aggiungere un fattore $1/2$. Se la sorgente di o.g. è in un punto imprecisato della volta celeste, è necessario fare una media angolare. Questa introduce un fattore $8/15$ e la (11b) diventa $h = 0.56 \times 1(4/15)^{1/2} \times 10^{-17} = 0.56 \times 0.52 \times 10^{-17} = 0.3 \times 10^{-17}$.
- [7] PIRANI F. A. E.: *Proc. of the Chapel Hill Conference on the Role of Gravitation in Physics*, p. 61, Astra Document N.AB 1181 80: Acta Phys. Polon. XV, 389 (1956).
- [8] BONDI H.: *Royaumont Conference*, Royaumont, France, June 1959 (non pubblicato).
- [9] WEBER J.: Phys. Rev. 117, 306 (1960).
- [10] WEBER J.: Phys. Rev. Lett. 22, 1302 (1969): per un riassunto del suo lavoro complessivo, vedi: WEBER J.: Proc. of the Symposium on «Experimental Gravitation», Pavia, 17 - 20 September, 1976, a cura di B. Bertotti, Atti dei Convegni Lincei, 34, 213 (1977), Accad. Naz. Lincei, Roma (1977).
- [11] Vedi, per esempio: PAPOULIS A.: «Probability, Random Variables, and Stochastic Processes», Mc Graw-Hill, 1965.
- [12] AMALDI E., BONIFAZI P., BORDONI F., COSMELLI C., FERRARI V., GIOVANARDI U., MODENA I., PALLOTTINO G. V., PIZZELLA G., VANNARONI G.: «Measurements with a small ($M = 24.4$ kg) Cryogenic Gravitational Wave Antenna at 1.5 K», Nuovo Cimento 1C, 241 (1978).
- [13] PIZZELLA G.: *Optimum Filtering and Sensitivity for Resonant Gravitational Wave Antenna*, «Nuovo Cimento» 2C, 209 (1979).
- [14] BONIFAZI P., FERRARI V., FRASCA S., PALLOTTINO G. V., PIZZELLA G.: «Data analysis algorithms of gravitational wave experiments». Nuovo Cimento 1c, 465 (1978).
- [15] Sia il passato che il futuro sono limitati dal tempo τ_0 di «memoria» dell'antenna, e pertanto per applicare questo algoritmo basta iniziare le operazioni di calcolo con un ritardo, rispetto al tempo reale, dell'ordine di τ_0 .
- [16] AMALDI E., PIZZELLA G.: «La ricerca di onde gravitazionali» in Centenario di Einstein 1879 - 1979: Astrofisica e Cosmologia, Giunti-Barbera, Firenze (1979).
- [17] AMALDI E., PIZZELLA G.: «The gravitational wave experiment in Rome: Progress Report», Nota Interna N° 645, 10 novembre 1975, Istituto di Fisica G. Marconi, Università di Roma; AMALDI E., BARBANERA S., BONIFAZI P., BORDONI F., CERDONIO M., COSMELLI C., GIOVANARDI U., MODENA I., PALLOTTINO G. V., PIZZELLA G., RICCI F. F.,

- ROMANI G. L., VANNARONI G.: «The Gravitational Wave Experiment in Rome»; negli Atti del Simposio Internazionale su «Gravitazione Sperimentale», Pavia, 17 - 20 settembre 1976, a cura di B. Bertotti, Atti dei Convegni Lincei 34, 287 (1977, Accad. Naz. Lincei, Roma).
- [18] AMALDI E., BONIFAZI P., FERRARI V., PALLOTTINO G. V., PIZZELLA: «Main Features and Performance of the $M = 390$ kg Cryogenic Gravitational Wave Antenna (June-July 1978)», Nota Interna N° 724, 29 gennaio 1979, Istituto di Fisica G. Marconi, Università di Roma.
- [19] DOUGLASS D. H.: GRAM R. Q., TYSON J. A., LEE R. W.: Phys. Rev. Lett. 35, 480 (1975).
- [20] BILLING H., KAFKA P., MEISCHBERGER K., MEYER F., WINKLER W.: Lett. Nuovo Cimento, 12, 11 (1975).

BRUNO BERTOTTI (*)

LA RADIAZIONE GRAVITAZIONALE DI FONDO: TEORIA E RIVELAZIONE.

Sommario.

La teoria generale delle perturbazioni di alta frequenza di un universo in espansione permette una definizione precisa del problema della radiazione gravitazionale di fondo. Vengono poi passate in rassegna le possibili sorgenti e le conseguenze cosmologiche di tale radiazione, in relazione ai suoi due principali parametri, la densità di energia e il suo periodo caratteristico presente. Si discute infine possibilità di rivelarla mediante una misura doppler di alta precisione in una missione spaziale interplanetaria.

Summary.

The general theory of the high frequency perturbations of an expanding universe provides a precise definition of the gravitational background radiation. I review then the possible sources and the cosmological implications of such a radiation, in relation to its main parameters, to wit, the energy density and the present characteristic periods. Finally, I discuss the possibility of its detection with a high precision doppler measurement in an interplanetary mission.

1. Teoria matematica.

Consideriamo una varietà riemanniana la cui metrica è somma di una parte cosmologica di Robertson-Walker e di una parte di alta frequenza, le cui scale di variazione temporale e spaziale sono dello stesso ordine P ed assai più piccole del raggio dell'universo R a quell'istante:

$$(1) \quad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{RW} + h_{\mu\nu},$$

(*) Istituto di Fisica Teorica, Università di Pavia.

con

$$\frac{R}{P} = \max \{ R | \partial_\mu \ln h_{\rho\sigma} | \} \gg 1.$$

Si suppone che il campo $h_{\mu\nu}$ abbia una distribuzione statistica isotropa nel sistema di riferimento comoviente della metrica RW . La definizione rigorosa della scomposizione (1) può essere fatta introducendo un insieme di universi aventi le stesse proprietà macroscopiche e una misura di probabilità su di esso (si veda al riguardo i lavori di J. Kampé de Fériet, ad esempio, del 1956). Per questa misura $\langle g_{\mu\nu} \rangle = g_{\mu\nu}^{RW}$ e la media di ogni tensore costruito con $h_{\mu\nu}$ è una grandezza isotropa. Questa media ha il vantaggio di essere permutabile con le operazioni di derivazione e di integrazione nello spazio-tempo; inoltre vige la proprietà $\langle f \rangle \langle g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle$. Se non si è disposti ad accettare le infinite repliche dell'universo si può sostituire l'operazione $\langle \rangle$ con la media su regioni spazio-temporali di dimensioni L che soddisfino alla disequazione $R \gg L \gg P$; questa media commuta solo approssimativamente con la derivazione e non verifica la proprietà suddetta.

Questo schema possiede due parametri di piccolezza, $h = 0(h_{\mu\nu}/g_{\mu\nu}^{RW})$ e $\epsilon = 0(P/R)$. Le equazioni di Einstein per il tensore di Ricci $G_{\mu\nu}$, diventano, simbolicamente

$$(2) \quad G^{RW} = T^{RW} - [G - \langle G \rangle],$$

ove

$$-G + \langle G \rangle = T^R = 0 \quad (h^2/P^2)$$

appare all'osservatore macroscopico come il tensore di energia della radiazione $T_{\mu\nu}^R$. Si dimostra (Isaacson, 1968; vedi anche Choquet-Bruhat, 1968) che al secondo ordine in ϵ esso assume in un sistema localmente inerziale la forma

$$(3) \quad T_{\mu\nu}^R = \int d^3k A(\mathbf{k}) \mathbf{k}_\mu \mathbf{k}_\nu,$$

ove $\mathbf{k}_\nu = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k})$ è il vettore di propagazione di ciascuna onda. Nel caso, che noi consideriamo, di distribuzione isotropa,

$$(4) \quad T_{\mu\nu}^R = \text{diag} \left(\rho_g, \frac{1}{3} \rho_g, \frac{1}{3} \rho_g, \frac{1}{3} \rho_g \right) \quad (\rho_g > 0).$$

ρ_g è la densità di energia della radiazione gravitazionale e $\Omega_g = \rho_g/\rho_c = 8\pi\rho_g/3H^2$ il corrispondente parametro in funzione della densità critica ρ_c . Esso è legato ai parametri caratteristici del fondo dalla relazione approssimativa

$$(5) \quad \Omega_g \sim h^2/H^2 P^2.$$

Si noti però che il coefficiente numerico del secondo membro è dell'ordine di 10^{-2} , un notevole vantaggio per la rivelazione (vedi (15)).

Se ρ_g è più piccolo della densità di materia ρ_m , cioè $\Omega_g < \Omega_m$, l'espansione è determinata da T^{RW} ed è di tipo tradizionale, con $R^{-2} \sim \Omega_m \rho_c > h^2/P^2$. Se invece $\Omega_g > \Omega_m$, $Rh \sim P$ e l'espansione è dominata dalla radiazione.

La propagazione di un singolo modo (con $P \ll R$) è determinata dalla conservazione dell'invariante adiabatico, secondo la quale

$$(6) \quad hR = \text{cost},$$

ove h è l'ampiezza. Inoltre la sua frequenza P^{-1} si sposta verso il rosso con la legge $P/R = \text{cost}$, per cui, come avviene per le onde elettromagnetiche, $\rho_g \sim R^{-4}$.

2. Sorgenti del fondo gravitazionale e sue implicazioni cosmologiche.

Il materiale contenuto nelle sezioni 2 e 3 è stato sviluppato da B. Carr e dall'autore. (Carr 1979; Bertotti e Carr 1979).

2a. Radiazione gravitazionale priordiale di fondo.

Ricordiamo che nella cosmologia tradizionale $\Omega_m < 1$ e per il fondo elettromagnetico $\Omega_{em} \sim 10^{-4}$. Indicando con t_0 l'epoca presente, l'espansione passata era libera ($R \sim t$) dopo il tempo $t_f = t_0 \Omega_m$, prima del quale il moto dell'universo era di tipo parabolico, con $R = \Omega_m^{1/3} t_0^{1/3} t^{2/3}$. Solo prima del tempo di equipartizione $t_{eq} = t_0 \Omega_m^{-2} \Omega_{em}^{3/2}$ la radiazione elettromagnetica è importante; in tale periodo $R = t_0^{1/2} \Omega_{em}^{1/4} t^{1/2}$. La temperatura T_r della radiazione elettromagnetica è sempre $T_r = 3^\circ K R_0/R$. Poiché nel quadro di un universo isotropo la radiazione gravitazionale si comporta alla stessa maniera della radiazione elettromagnetica, le stesse conclusioni valgono per il caso che ci interessa, purché a Ω_{em} si sostituisca $\Omega_r = \Omega_{em} + \Omega_g$.

La produzione di elio e di deuterio primordiale pone un limite importante a tale parametro Ω_r . Il rapporto delle concentrazioni dei neutroni e dei protoni è fissato dalle reazioni β , in particolare $\nu + n \rightarrow p + e^-$, che è caratterizzata dalla frequenza $\nu_\beta = \sigma n_\nu c$. Quando ν_β^{-1} è più piccolo della scala temporale di espansione $R/\dot{R}$ abbiamo una situazione di equilibrio termodinamico in cui il rapporto suddetto è unicamente determinato dalla differenza di massa tra neutrone e protone:

$$(7) \quad \frac{N_n}{N_p} = \exp \left(- \frac{m_n - m_p}{kT} c^2 \right).$$

All'istante t_f in cui $\nu_\beta^{-1} \sim R/\dot{R}$ le reazioni β perdono la loro efficacia e il rapporto rimane congelato al valore corrispondente a $T_r(t_f)$; da questo momento in poi il deuterio si accumula con $n + p \rightarrow d + \gamma$ e da esso si forma l'elio, producendo complessivamente un nucleo di elio per ogni due neutroni presenti all'istante t_f . La quantità di elio formato dipende quindi dalla rapidità con cui l'universo si espande ad una certa temperatura; dalle relazioni precedenti si vede che

$$\frac{R}{\dot{R}} = 2t = \frac{2R^2}{t_0 \Omega_r^{1/2}} = 2 \left(\frac{3 \text{ }^\circ\text{K}}{T} \right)^2 \frac{R_0^2}{t_0 \Omega_r^{1/2}},$$

per cui aumentando Ω_r si sposta indietro l'istante t_f di congelamento, si aumenta temperatura corrispondente $T_r(t_f)$ e quindi anche il rapporto delle concentrazioni n_r/n_p . I calcoli mostrano che il valore elettromagnetico $\Omega_r = 10^{-4}$ è marginale, la temperatura corrispondente $T_r(t_f)$ e quindi anche il rapporto delle concentrazioni N_n/N_p . I calcoli mostrano che il valore elettromagnetico $\Omega_r = 10^{-4}$ è marginale. *avere in questo schema una densità di energia di radiazione gravitazionale superiore a quella elettromagnetica.*

2b. Radiazione gravitazionale di fondo non primordiale.

Vi sono delle maniere non convenzionali (Carr 1979) per sfuggire a questo dilemma; abbiamo studiato in dettaglio la possibilità che il fondo gravitazionale abbia avuto origine da una fase specifica nell'evoluzione dell'universo che ha avuto luogo *dopo* la sintesi primordiale degli elementi. E' importante notare che un problema analogo sussiste anche per il fondo elettromagnetico, dato che la cosmologia tradizionale non è in grado di spiegare l'elevato rapporto tra il numero dei fotoni e dei barioni nell'universo; Rees (1978) ha mostrato invece che il fondo elettromagnetico può avere avuto origine da fenomeni di collasso gravitazionale a $Z \sim 100$ giustificando in questa maniera quel rapporto.

Supponiamo che all'epoca z_B abbia avuto luogo un collasso generalizzato di oggetti di massa M ; sia $\Omega_B \rho_c$ la loro presente densità di massa e $\rho_c \Omega_B/M$ la loro densità numerica. Se ciascuno di questi collassi ha trasformato una frazione ϵM della sua massa in energia gravitazionale, la presente densità di radiazione gravitazionale è data da

$$(8) \quad \Omega_g = \epsilon \Omega_B z_B^{-1};$$

si è qui tenuto conto anche dello spostamento verso il rosso subito da ciascun «gravitone». Il periodo caratteristico e la durata di ciascun impulso è, in unità gravitazionali ($G = c = 1$)

$$(9) \quad P = M(1 + z_B) = 10^{-5} \frac{M}{M_\odot} (1 + z_B) \text{ sec.}$$

Poiché questi collassi hanno avuto luogo in tutto l'universo l'intervallo di tempo $\Delta\tau$ tra due collassi si può calcolare nella maniera seguente: tra i presenti raggi R , $R + dR$ vi sono ora

$$\frac{\rho_c \Omega_B}{M} 4 \pi R^2 dR$$

oggetti e i loro collassi occupano un intervallo di tempo dR/c ; quindi

$$(9) \quad \Delta\tau = \frac{M}{4 \pi R^2 \Omega_B \rho_c} \sim \frac{M}{\Omega_B}.$$

Se $\Delta\tau > P$ essi danno luogo ad impulsi gravitazionali distinti, mentre contribuiscono al fondo se

$$(10) \quad \frac{P}{\Delta\tau} \sim \Omega_B z_B > 1.$$

Poiché al massimo Ω_B è eguale all'unità, dalla (8) si vede che z_B non può essere troppo grande.

La possibilità di formazione di numerosi buchi neri primordiali, messa in evidenza da Carr e Hawking (1974), ha dato materia a numerosi studi. Le ipotesi di massima che offrono il maggior interesse per il nostro argomento sono due. Anzitutto appena dopo la ricombinazione dell'idrogeno la massa critica di Jeans è calata bruscamente a circa $10^6 M_\odot$ ed è possibile che le fluttuazioni corrispondenti abbiano subito un collasso; in questo caso $10 < z_B < 10^3$, il periodo caratteristico P è compreso (eq. (9)) tra 100 sec e 10^4 sec e la densità di onde gravitazionali sarebbe, prendendo $\Omega_B = 1$, compresa tra 10^{-3} e 10^{-5} (con $\epsilon = 10^{-2}$).

E' anche possibile che buchi neri si siano formati dopo la formazione delle galassie, sia come fase finale dell'evoluzione della prima generazione di stelle massive o a causa del collasso di intere galassie. Questo tipo di sorgente è sostanzialmente lo stesso di quello considerato da Thorne e Braginsky, con la differenza che i collassi sono supposti così frequenti da apparire sovrapposti. In questo caso $z_B \sim 1$ e, per $\Omega_B \sim 10^{-1}$, avremo Ω_g dell'ordine di 10^{-3} . E' difficile stimare il periodo caratteristico P ; per tipiche masse galattiche, comprese tra 10^8 e $10^{12} M_\odot$, avremo $10^3 < P < 10^7$.

3. Rivelazione della radiazione gravitazionale di fondo.

Mi limiterò a discutere qui la rivelazione di onde gravitazionali di frequenza compresa tra 10^{-6} e 10^{-2} sec^{-1} ; quindi non parlerò dell'anisotropia della radia-

zione elettromagnetica di fondo che esse possono generare se hanno frequenza assai più piccola.

Consideriamo uno spettro di radiazione gravitazionale $\rho(\omega)$, con

$$(11) \quad \rho_g = \Omega_g \rho_c = \int_0^{\infty} d\omega \rho(\omega);$$

supporrò che esso sia a *banda larga* e che cali rapidamente al di là di una frequenza caratteristica $2\pi/P_0$, per cui $\Omega_g \rho_c \sim 2\pi\rho/P_0$. Si noti che un risultato negativo nella misura di $\rho(\omega_1)$, per esempio, non ci direbbe nulla su Ω_g se P_0 non è noto; ma un risultato positivo richiede $P_0 \omega_1 > 2\pi$ e fornisce un limite inferiore $\Omega_g > \omega_1 \rho(\omega_1)/\rho_c$.

I pianeti e i satelliti naturali ci offrono sistemi risonanti sensibili a $\rho(4\pi/P)$, ove P è il periodo orbitale. (Bertotti 1973). Si può mostrare che il semiasse maggiore dell'orbita a descrive un «cammino a caso» e dopo N orbite il suo mutamento δa è dato, in media, da

$$(12) \quad \frac{1}{N} \left\langle \left(\frac{\delta a}{a} \right)^2 \right\rangle \sim P \rho \left(\frac{4\pi}{P} \right) \sim P P_0 \rho_c \Omega_g < \rho_c P^2 \Omega_g.$$

Per esempio, se nella determinazione della distanza terra-luna si osservasse un'anomalia di questo genere (con, diciamo, $N = 100$ e $\delta a/a \sim 2 \cdot 10^{-10}$), il limite inferiore per Ω_g sarebbe circa 4.

L'uso di misure doppler di alta precisione tra la stazione di terra e un satellite artificiale in orbita interplanetaria offre uno strumento di rivelazione del fondo gravitazionale di grandissimo interesse. Lo spostamento percentuale $\Delta\nu/\nu$ della frequenza di una portante radio è dello stesso ordine di $h \sim \sqrt{\Omega_g} H P$ (eq. (5)); per $\Omega_g \sim 1$, $H^{-1} = 6 \cdot 10^{17}$ sec, $P \sim 10^3$ sec abbiamo $h \sim 2 \cdot 10^{-15}$, che è maggiore della stabilità di frequenza correntemente raggiunta dai maser a idrogeno. La teoria precisa della misura è stata fatta da Estabrook e Wahlquist (1975) (vedi anche Mashhoon 1979).

Un treno d'onde elettromagnetiche coerente viene rinviato verso la terra da un ritrasmettitore di bordo che ne conserva la fase; con sistemi elettronici si costruisce la funzione $y(t) = \Delta\nu/\nu$ e se ne calcola la funzione di correlazione

$$(13) \quad G_y(\tau) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} dt y\left(t - \frac{\tau}{2}\right) y\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$$

e quindi lo spettro

$$(14) \quad S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} C_y(\tau).$$

La parte di y dovuta al campo gravitazionale, chiamata $w(t)$, è proporzionale allo spettro di energia, con una modulazione caratteristica che dipende dal tempo T che il segnale impiega a compiere il tragitto di andata e ritorno:

$$(15) \quad S_w(\omega) = 8\pi^2 \frac{\rho(\omega)}{\omega^2} R(\omega).$$

La funzione modulante

$$(16) \quad R(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2 - 3}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2 + 3}{3 \left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} \cos \omega T + \frac{2 \sin \omega T}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^3}$$

è periodica per $\omega T \gg 1$:

$$(17) \quad R(\omega) = 1 - \frac{1}{3} \cos \omega T;$$

mentre è parabolica nel limite opposto $\omega T \ll 1$:

$$(18) \quad R(\omega) = \frac{2}{15} \omega^2 T^2.$$

Questa modulazione è importante per discriminare il segnale dal rumore; quindi la distanza del satellite $T/2$ deve essere più grande possibile per poter rivelare frequenze abbastanza basse.

Al segnale gravitazionale $\omega(t)$ si aggiunge un rumore $n(t)$ proveniente principalmente da tre fonti.

a) Il plasma interplanetario e ionosferico ha un indice di rifrazione

$$(19) \quad n_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{(2\pi\nu)^2} = 1 + \Delta n_r,$$

ove ω_p è la frequenza di plasma; una fluttuazione nella densità degli elettroni causa una fluttuazione nel cammino ottico $l = \int ds/n_r$, proporzionale a ν^{-2} . Occorre quindi usare frequenze più elevate possibile ed eseguire le misure quando il satellite si trova dalla parte opposta del sole. Recenti misure fatte con la mis-

sione Viking hanno infatti mostrato una notevole riduzione (circa un ordine di grandezza) di questo rumore quando l'angolo α satellite-terra-Sole è vicino a 180° . Ciò è in accordo con il fatto che la turbolenza del plasma interplanetario è stazionaria nel sistema di riferimento solidale col vento solare; quindi quando $180^\circ - \alpha$ diminuisce le zone di perturbazione impiegano sempre più tempo ad attraversare il cammino dei raggi e lo spettro, che è decrescente, si sposta verso le basse frequenze. Questo problema, però, può essere eliminato radicalmente solo usando contemporaneamente due portanti o frequenze diverse e sfruttando la forma particolare di n_r (eq. (19)).

b) Le perturbazioni della troposfera (soprattutto quelle dovute alle fluttuazioni nella concentrazione di vapor d'acqua) introducono una variazione del cammino ottico che è dell'ordine di qualche metro per l'aria secca, con un'addizionale contributo assai variabile di 10-20 cm per l'umidità. Il primo termine si può misurare con grande precisione con misure barometriche da terra; per il secondo si può usare il fatto che esso è fortemente correlato con l'intensità delle righe di emissione del vapor d'acqua misurate a terra. Per questo occorre usare durante le misure radiometri di precisione installati presso ciascuna antenna. Notiamo che ad una accuratezza $\Delta\nu/\nu$ per un tempo di integrazione τ corrisponde una variazione del cammino ottico

$$(20) \quad l(t + \tau) - l(t) \sim \tau c \frac{\Delta\nu}{\nu};$$

per $\Delta\nu/\nu \sim 2 \cdot 10^{-15}$, $\tau = 10^3$ sec essa è di $6 \cdot 10^{-2}$ cm. I presenti esperimenti permettono di determinare l con accuratezza dell'ordine di 2-3 mm; occorre quindi del lavoro sperimentale per ottenere una precisione migliore. Anche questo rumore ha uno spettro decrescente.

c) La stabilità di frequenza di un campione dipende dal tempo di integrazione; più precisamente lo spettro di $\Delta\nu/\nu$, $S_{\Delta\nu/\nu}$ aumenta notevolmente al di sopra di una frequenza critica $2\pi/\Delta t$. Le più recenti misure del rumore di un maser a idrogeno (Vessot et al. 1978) hanno messo in evidenza uno spettro della forma

$$(20) \quad \begin{aligned} S_{\Delta\nu/\nu}(\omega) &= 2 \sigma_0^2 \Delta t \quad (\omega \Delta t < 2\pi) \\ S_{\Delta\nu/\nu}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \sigma_0^2 \omega(\Delta t) \quad (\omega \Delta t > 2\pi), \end{aligned}$$

con $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-14}$, $\Delta t = 3$ sec. Il rumore totale sino ad una frequenza T^{-1} è allora $2\sigma_0^2 \Delta t/T \sim 10^{-30}$ (per $T = 3000$ sec), che certamente è un valore interessante dal punto di vista cosmologico (v. eq. (5)).

L'analisi dei dati dell'esperimento è delicata ed importante perché occorre sfruttare pienamente la modulazione caratteristica (16) del segnale. Notiamo

anzitutto che la durata finita (diciamo T_1) della misura impedisce di calcolare esattamente la funzione di correlazione (13) e lo spettro (14). Il ritardo τ che appare nella (13) non può essere troppo grande, perché altrimenti la media su t (sempre compreso tra $(-T_1 + \tau)/2$ e $(T_1 - \tau)/2$) è insufficiente; né troppo piccolo perché ciò darebbe una scarsa risoluzione in frequenza nella misura. Si dimostra infatti che il massimo ritardo adottato τ_m è legato alla risoluzione in frequenza dall'equazione $\Delta\omega = 2\pi/\tau_m$ (Blackman e Tukey 1958); converrà allora scegliere $\tau_m \sim 3T$ in maniera da permettere la discriminazione della modulazione (17). La misura dello spettro $S_y(\omega)$ è affetta da un errore intrinseco

$$(21) \quad \Delta S_y(\omega) \sim S_y(\omega) \sqrt{\frac{\tau_m}{T_1}}.$$

Per risalire allo spettro gravitazionale w dallo spettro della grandezza misurata

$$(22) \quad y(t) = w(t) + n(t)$$

occorre sottrarre da S_y lo spettro S_n del rumore. Se ciò non fosse possibile perché S_n è completamente ignoto, l'errore in S_w è data da S_n stesso. Il punto cruciale dell'analisi sta nel riuscire ad effettuare questa sottrazione sfruttando il fatto che ogni rumore ha una modulazione diversa da quella del segnale $w(t)$; se ciò è possibile l'errore è ridotto per il fattore $\sqrt{\tau_m/T_1}$ e diventa $S_n(\omega) \sqrt{\tau_m/T_1}$. Per esempio, se $\tau_m = 10^4$ sec, $T_1 = 10^7$ sec, il fattore di riduzione è $1/30$. A basse frequenze sono i rumori di tipo a) e b) che contribuiscono maggiormente al rumore: se essi sono compatibili con il valore indicato dopo l'eq. (20) $S_n/T \sim 10^{-30}$ avremo un errore in Ω_g dell'ordine di

$$(23) \quad \begin{aligned} \Delta\Omega_g &\sim \frac{1}{H^2 P^2} S_n \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\tau_m}{T_1}} > \\ &> \frac{1}{H^2 T^2} S_n \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\tau_m}{T_1}} \sim 10^{-3}. \end{aligned}$$

La missione «*Solar Polar*», che partirà il 3 febbraio 1983, offrirà una prima possibilità di sperimentare questa tecnica e di utilizzare contemporaneamente due misure indipendenti. Essa consiste in due satelliti uguali che viaggeranno di conserva sino a Giove, per poi separarsi in orbite con inclinazione di 90° ; uno di essi volerà al di sopra del piano della eclittica ed uno al di sotto. La loro distanza D dalla terra ha un massimo di 6 U.A. corrispondente a un tempo $T = 5760$ sec; la misura può essere fatta quando $D \sim 4-5$ U.A., con $T \sim 4000-5000$ sec, dopo il passaggio vicino a Giove. Poiché i rumori delle due misure non sono in generale

correlati, a differenza del segnale gravitazionale, il rapporto segnale/rumore viene ulteriormente migliorato. Purtroppo la strumentazione radio di terra ed i bordo è stata scelta in base alle esigenze primarie della missione, che riguardano la fisica solare; nella presente versione essa consiste in una portante in banda S da terra e una portante in banda X dal satellite. In queste condizioni il forte rumore dovuto al plasma nel treno d'onda verso l'alto produce un $\Delta\nu/\nu$ di circa 10^{-14} e rende quindi l'esperimento poco interessante.

E' interessante notare, comunque, che la stessa strumentazione può venire usata per la rivelazione di impulsi singoli causati da eventi violenti in nuclei galattici, la cui intensità è a priori ignota (Thorne and Braginsky, 1976).

E' allo studio sia presso la NASA che l'ESA un'altra missione di grande interesse per le ricerche gravitazionali, la «*Solar Probe*» (Neugebauer and Davies, 1978); essa consiste in un satellite speciale che, dopo aver girato attorno a Giove arriverà ad una distanza dal centro del Sole di circa $4R_{\odot}$. Essa dovrebbe avere un sistema di comunicazioni radio a più canali e un meccanismo di compensazione delle forze non gravitazionali che agiscono sul satellite e permetterà quindi un tentativo assai più valido di rivelazione del fondo gravitazionale.

Non c'è dubbio quindi che negli anni '80 queste misure doppler spaziali ci daranno importanti informazioni sulla radiazione gravitazionale di fondo e quindi sulle prime fasi di evoluzione dell'universo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERTOTTI B., 1973. *Astrophys. Lett.* 14, 51.
- [2] BERTOTTI B., and CARR B. J., 1979. «On the detectability of a cosmological background of gravitational radiation». To be published in *Ap. J.*
- [3] BLACKMAN R. B., and TUKEY J. W. 1958: «The measurement of power spectra». New York, Dover Publications.
- [4] CARR B. J. 1979. «Cosmological gravitational waves: their origin and consequences». To be published in *Ap. J.*
- [5] CARR B. J. and HAWKING S. W., 1974. *Mon. Not., R. astr. Soc.* 168, 399.
- [6] CHOQUET-BRUHAT Y., 1968. *Commun. Math. Phys.* 12, 16.
- [7] ESTABROOK F. B. and WAHLQUIST H. D. 1975. *GRG* 6, 439.
- [8] ISAACSON R. A., 1968. *Phys. Rev.* 166, 1263 and 1272.
- [9] KAMPÉ DE FÉRIET J., 1956. *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, 27, 3.
- [10] MASHHOON B., 1979. *Ap. J.* 227, 1019.
- [11] NEUGEBAUER M. and DAVIES R. W., editors, 1978 «A close-up of the Sun». *JPL Publication* 78-70.
- [12] REES M. J. 1978. *Nature*, 275, 35.
- [13] THORNE K. S. and BRAGINSKY V. B., 1976. *Ap. J.* 204, L1.
- [14] VESSOT R. F. C., LEVINE M. W. and MATTISON E. M., 1978. *Proc. IX Annual Precise Time and Time Interval Applications and Planning Meeting. NASA Tech. Mem.* 78104, p. 549.

ELISA BRINIS UDESCHINI

QUESTIONI RELATIVISTICHE NELLA TRATTAZIONE SPINORIALE.

Summary.

The aim of this work is to illustrate the typical features and the rôle of the spinor calculus as well as of the dyad formalism in the relativistic gravitational theory, by means of significant results. Different formulations of the gravitational field equations in spinor form are analysed; the classification of the gravitational field is then presented and some exact solutions for free-field Einstein equations are treated in detail.

Il calcolo spinoriale trovò la prima significativa applicazione, nell'ambito della relatività ristretta, nella rappresentazione delle funzioni d'onda atte a caratterizzare l'elettrone o, più in generale, le particelle dotate di spin.

L'esigenza dell'invarianza relativistica delle equazioni di Dirac, infatti, comporta la necessità di attribuire alle funzioni d'onda opportune leggi di trasformazione, in corrispondenza alle trasformazioni spazio-temporali di Lorentz. Di qui l'identificazione della funzione d'onda con uno spinore semplice a quattro componenti, o con una coppia di spinori semplici a due componenti.

Il formalismo spinoriale assunse, così, ruolo essenziale nell'ambito del microcosmo, per lo studio dei campi delle particelle elementari.

Tuttavia, dopo lo sviluppo della teoria matematica degli spinori, con estensione dell'analisi spinoriale al caso di spazio-tempo riemanniano, rilevate e chiarite anche le relazioni fra calcolo tensoriale e spinoriale, quest'ultimo acquistò interesse come strumento di rappresentazione e di indagine anche per i campi fisici del macrocosmo, quali il campo elettromagnetico e quello gravitazionale.

Per il campo gravitazionale einsteiniano, in particolare, non soltanto la rappresentazione mediante spinori a due componenti risulta elegante ed espressiva, ma anzi, sotto alcuni aspetti ed in certe questioni, la trattazione spinoriale, grazie

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

anche all'uso delle diadi, si rivela più opportuna di quella tensoriale.

Scopo della mia esposizione è presentare alcune di tali questioni, per illustrare qualche risultato significativo e per sottolineare i caratteri tipici e le possibilità del metodo spinoriale.

Senza pretesa di offrire un quadro completo ed organico, spero tuttavia di poter mostrare come il calcolo spinoriale si sia ormai imposto nell'ambito della teoria della relatività generale, tanto da poter essere affiancato a quello tensoriale quale strumento parimenti valido e come l'opportunità di ricorrere all'uno piuttosto che all'altro dipenda dal tipo di problema da trattare.

1. Spinori a due componenti in una varietà riemanniana.

In ciascun punto di una varietà riemanniana spazio-temporale V_4 , si può considerare, accanto allo spazio-tempo pseudoeuclideo tangente, ove si sviluppa l'algebra tensoriale, uno spazio complesso bidimensionale di spin nel quale si sviluppa l'algebra degli spinori a due componenti [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Il collegamento fra tensori e spinori si istituisce valendosi dello spin-tensore fondamentale $\sigma^\mu_{\dot{A}B}$ ($\mu, \nu \dots = 0, 1, 2, 3$; $\dot{A}, B \dots = 0, 1$), costituito da quattro matrici (2×2) hermitiane: $\bar{\sigma}^\mu_{\dot{A}B} = \sigma^\mu_{\dot{B}A}$ (la soprallineatura indica il complesso coniugato) che si comportano come vettori rispetto all'indice μ e come spinori rispetto agli indici $\dot{A}$ e B (1). Detto spin-tensore è legato al tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$ di V_4 (che assumiamo di segnatura $+- - -$) dalle relazioni:

$$(1.1) \quad \sigma^\mu_{\dot{A}B} \sigma^\nu_{\dot{C}} + \sigma^\nu_{\dot{A}B} \sigma^\mu_{\dot{C}} = g^{\mu\nu} \epsilon_{BC}$$

essendo

$$\epsilon_{BC} = \epsilon^{BC} = \epsilon_{\dot{B}\dot{C}} = \epsilon^{\dot{B}\dot{C}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

lo spinore doppio emisimmetrico che permette di alzare ed abbassare gli indici spinoriali secondo le: $\omega_A = \epsilon_{BA} \omega^B$; $\omega^A = \epsilon^{AB} \omega_B$.

Mediante $\sigma^\mu_{\dot{A}B}$ si stabiliscono opportune corrispondenze fra tensori e spinori. Oltre alla semplice corrispondenza che muta ciascun indice tensoriale in una coppia di indici spinoriali (e viceversa), secondo le:

$$(1.2) \quad V_{\dot{R}S} = V_\alpha \sigma^\alpha_{\dot{R}S}; \quad V_\alpha = \sigma_\alpha^{\dot{R}S} V_{\dot{R}S}$$

(1) Gli indici puntati si riferiscono allo spazio di spin complesso coniugato: il passaggio al complesso coniugato cambia gli indici puntati in indici non puntati e viceversa. Per una trasformazione spinoriale gli indici puntati si trasformano con legge complessa coniugata rispetto ai non puntati.

interessa qui richiamarne altre particolari che sussistono sotto determinate ipotesi di simmetria [7].

Si ha, ad esempio, la corrispondenza fra un tensore doppio reale emisimmetrico $F_{\mu\nu}$ ed uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB} , tradotta direttamente dalle:

$$(1.3) \quad \Phi_{AB} = \frac{1}{8} S_{\mu\nu AB} F^{\mu\nu}; \quad F_{\mu\nu} = S_{\mu\nu AB} \Phi^{AB} + \bar{S}_{\mu\nu AB} \bar{\Phi}^{AB}$$

con:

$$(1.4) \quad S_{\mu\nu AB} \equiv \sigma_\mu \dot{c}_A \sigma_\nu \dot{c}_B - \sigma_\nu \dot{c}_A \sigma_\mu \dot{c}_B$$

e deducibile anche dalla scomposizione dello spinore quadruplo $F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$, equivalente ad $F_{\mu\nu}$ per le (1.2), secondo le:

$$(1.5) \quad F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \frac{1}{2} (\Phi_{\dot{A}\dot{C}} \epsilon_{\dot{B}\dot{D}} + \Phi_{\dot{B}\dot{D}} \epsilon_{\dot{A}\dot{C}})$$

ove Φ_{AB} risulta univocamente definito.

Così pure, ad un tensore quadruplo reale $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ dotato delle proprietà di simmetria del tensore di Riemann, oltretutto della sua proprietà ciclica, vengono a corrispondere due spinori quadrupli χ_{ABCD} e $\Phi_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$, dotati delle simmetrie:

$$(1.6) \quad \chi_{ABCD} = \chi_{BACD} = \chi_{ABDC} = \chi_{CDAB}$$

$$(1.7) \quad \Phi_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \Phi_{\dot{B}\dot{A}\dot{C}\dot{D}} = \Phi_{\dot{A}\dot{B}\dot{D}\dot{C}} = \Phi_{\dot{C}\dot{D}\dot{A}\dot{B}}$$

e per uno dei quali vale la condizione:

$$(1.8) \quad \chi_{ABC}{}^B = \lambda \epsilon_{AC}, \quad \text{con } \lambda \equiv \frac{1}{2} \chi_{AB}{}^{AB} \equiv \frac{1}{2} \chi_{\dot{A}\dot{B}}{}^{\dot{A}\dot{B}}.$$

Detti spinori risultano univocamente definiti attraverso una decomposizione analoga alla (1.5) operata sullo spinore ad otto indici $R_{\dot{E}\dot{A}\dot{F}\dot{B}\dot{G}\dot{C}\dot{H}\dot{D}}$, equivalente, per le (1.2), ad $R_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Ricordo infine la particolare corrispondenza fra vettori reali di modulo nullo e spinori semplici. Ogni spinore semplice ω^A , col suo coniugato $\omega^{\dot{A}}$, individua univocamente mediante la:

$$(1.9) \quad u^\alpha = \sigma^\alpha_{\dot{R}S} \omega^{\dot{R}} \omega^S$$

un vettore reale u^α di modulo nullo ($u^\alpha u_\alpha = 0$); al vettore nullo u^α , invece, corrispondono infiniti spinori semplici $\omega^A e^{i\varphi}$ che differiscono per la fase φ . Conformemente a ciò, si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra lo spinore semplice ω^A e un semipiano («bandiera») tangente al cono luce lungo la direzione di u^α ,

individuato, oltre che dallo stesso u^α , da un secondo vettore k^α , di tipo spaziale e di norma -2 , ortogonale ad u^α e opportunamente definito (2). Quando lo spinore ω^A viene moltiplicato per $e^{i\varphi}$, la sua bandiera ruota di 2φ attorno all'asta u^α .

Passando ad alcuni cenni di analisi spinoriale, è noto che, definita, secondo le usuali regole, la derivata covariante degli spinori (3):

$$(1.10) \quad \omega_{A/\mu} = \omega_{A,\mu} + \Gamma_{AB\mu} \omega^B$$

mediante l'introduzione di una connessione spinoriale $\Gamma_{AB\mu}$ (simmetrica negli indici AB), quest'ultima è determinabile in funzione di $\sigma_{\mu\dot{A}B}$ e delle sue derivate prime ordinarie, imponendo l'annullarsi delle derivate covarianti di $\sigma_{\mu\dot{A}B}$, di ϵ_{AB} e di $\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}$.

Con la connessione spinoriale e con le sue derivate prime, si costruisce poi lo spin-tensore di curvatura $C_{\mu\nu AB}$ (emisimmetrico rispetto agli indici tensoriali e simmetrico rispetto a quelli spinoriali).

La curvatura di V_4 , però, si può anche caratterizzare in termini puramente spinoriali, per mezzo dei due spinori quadrupli di curvatura χ_{ABCD} e $\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}}$ (dotati delle simmetrie (1.6) e (1.7), nonché della proprietà (1.8)) che si possono far corrispondere al tensore di Riemann e che risultano legati allo spin-tensore $C_{\mu\nu AB}$ dalle relazioni:

$$(1.11) \quad \chi_{ABCD} = C_{\alpha\beta CD} \sigma^\alpha_{\dot{R}A} \sigma^{\beta\dot{R}}_B$$

$$(1.12) \quad \Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} = C_{\alpha\beta AB} \sigma^\alpha_{\dot{C}E} \sigma^{\beta E}_{\dot{D}}$$

Lo spinore di curvatura χ_{ABCD} si può decomporre secondo la:

$$(1.13) \quad \chi_{ABCD} = \psi_{ABCD} + \frac{\lambda}{3} (\epsilon_{AC} \epsilon_{BD} + \epsilon_{AD} \epsilon_{BC})$$

che ne pone in evidenza la parte completamente simmetrica ψ_{ABCD} ; questa costituisce lo spinore di curvatura conforme, in corrispondenza biunivoca con il tensore di Weyl.

Le identità di Bianchi, espresse in forma spinoriale, comportano fra i due spinori di curvatura le relazioni differenziali:

(2) Si perviene a k^α considerando lo spinore doppio simmetrico $\omega^A \omega^B$ ed il tensore doppio emisimmetrico $p^{\alpha\beta}$ ad esso corrispondente, secondo le (1-3). Risulta allora: $p^{\alpha\beta} = u^\alpha k^\beta + u^\beta k^\alpha$.

(3) La barra è simbolo di derivazione covariante; la virgola di derivazione ordinaria. Si ha poi:

$$\omega_{A/\dot{R}S} = \omega_{A/\mu} \sigma^\mu_{\dot{R}S}$$

$$(1.14) \quad \chi_{ABCD/\dot{G}}^D - \Phi_{ABGH}/\dot{H}_C \quad \text{e c.c.}^{(4)}$$

2. Diadi e coefficienti di spin. Geodetiche di lunghezza nulla.

Risulta spesso conveniente sviluppare il calcolo spinoriale in forma intrinseca, valendosi di diadi di riferimento, secondo il formalismo di Newman e Penrose [8]. Frutto di una sintesi fra la tecnica spinoriale e quella delle tetradi quasi ortonormali (introdotta dal Sachs nell'ambito tensoriale, ove ha permesso significativi risultati geometrici, suscettibili di interessanti interpretazioni fisiche), detto formalismo, associandone i vantaggi, si è rivelato strumento particolarmente opportuno ed efficace per trattare questioni connesse con la struttura algebrica dello spinore di curvatura conforme, nonché con proprietà delle geodetiche di lunghezza nulla (come, tipicamente, nel problema della radiazione).

Una diade di riferimento, individuata, nel generico punto di V_4 , da una coppia di spinori semplici ξ_a^A ($a, b, \dots = 0, 1$) soddisfacenti le condizioni:

$$(2.1) \quad \xi_{aA} \xi_b^A = \epsilon_{ab}, \quad \text{con } \epsilon_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

permette di definire, per un qualunque spinore $\varphi_A \dots$, le componenti di diade:

$$(2.2) \quad \varphi_a \dots = \varphi_A \dots \xi_a^A \dots; \quad \varphi_{\dot{b}} = \varphi_{\dot{B}} \dots \xi_{\dot{b}}^{\dot{B}} \dots$$

(essendo $\xi_{\dot{b}}^{\dot{B}}$ il complesso coniugato di ξ_b^B) che risultano invarianti per cambiamenti di riferimento spinoriale.

In particolare, le componenti di diade dello spin-tensore fondamentale $\sigma_{\dot{a}b}^\mu = \sigma_{\dot{A}B}^\mu \xi_{\dot{a}}^{\dot{A}} \xi_b^B$ risultano identificabili, in ciascun punto, secondo la corrispondenza di indici:

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} \dot{0}0 \\ \dot{1}1 \\ \dot{1}0 \\ \dot{0}1 \end{pmatrix} = \dot{a}b \leftrightarrow \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

con le componenti di una tetrad e quasi ortonormale di vettori nulli λ_α^μ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), soddisfacenti le condizioni:

$$(2.4) \quad \lambda_{\alpha\mu} \lambda_\beta^\mu = \begin{cases} 1 & (\alpha \neq \beta, \text{ con } \alpha, \beta = 1, 2) \\ -1 & (\alpha \neq \beta, \text{ con } \alpha, \beta = 3, 4) \\ 0 & (\text{negli altri casi}) \end{cases}$$

⁽⁴⁾ La notazione «e c. c.» sta per: «e complesse coniugate».

Si ha, in altri termini, una corrispondenza fra la diade ξ_a^A e la tetrad λ_α^μ così visualizzabile: i due vettori reali λ_1^μ e λ_2^μ individuano le aste delle bandiere dei due spinori ξ_0^A e ξ_1^A (ai quali corrispondono secondo le (1.9)), mentre i due vettori complessi coniugati λ_3^μ e $\lambda_4^\mu \equiv \bar{\lambda}_3^\mu$ permettono di caratterizzare i semipiani di dette bandiere. Il vettore somma dei due: $a^\mu = \lambda_3^\mu + \lambda_4^\mu$ (reale, spaziale, di norma -2 e perpendicolare a λ_1^μ) individua infatti, con λ_1^μ , la bandiera di ξ_0^A ; il suo opposto $-a^\mu$ individua, con λ_2^μ , la bandiera di ξ_1^A [9].

Per le componenti di diade valgono le stesse proprietà algebriche che per le componenti spinoriali; differente è invece il comportamento rispetto alla derivazione covariante che, per gli indici di diade, si identifica con quella ordinaria:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \omega_{a/\mu} &= (\omega_A \xi_a^A)_{/\mu} = \\ &= \omega_{a,\mu} - \omega_B \Gamma_{A\mu}^B \xi_a^A + \omega_A \xi_a^B \Gamma_{B\mu}^A = \omega_{a,\mu} \end{aligned}$$

Per lo spin-tensore fondamentale in forma intrinseca, pertanto, anche le derivate covarianti risultano diverse da zero.

La derivazione rispetto agli indici di diade: $\partial_{ab} \dots \equiv \dots_{/\mu} \sigma_{ab}^\mu$, è legata alla derivazione intrinseca lungo i vettori della tetrad: $D \dots \equiv \dots_{/\mu} \lambda^\mu$. Si ha precisamente: $\partial_{ab} \equiv D$ secondo la corrispondenza di indici (2.3). Si può sempre scegliere la diade (o il riferimento spinoriale) in modo che la connessione spinoriale tradotta in forma intrinseca (determinabile direttamente mediante σ_{ab}^μ e le sue derivate), assuma l'espressione:

$$(2.6) \quad \Gamma_{abcd} = \Gamma_{bacd} = (\partial_{cd} \xi_{aA}) \xi_b^A$$

che ne pone in evidenza l'analogia con i coefficienti di rotazione di Ricci della tetrad: $\gamma_{\alpha\beta\rho}^{\lambda\mu} = (D\lambda_{\rho\alpha}^\mu) \lambda_\beta^\lambda$

I dodici coefficienti Γ_{abcd} che, secondo le notazioni di Newman e Penrose, vengono così indicati:

$$(2.7) \quad \Gamma_{abcd} = \begin{array}{c|ccc|c} ab & 00 & 01 & 11 & cd \\ \hline & k & \epsilon & \pi & \dot{0}0 \\ & \rho & \alpha & \lambda & \dot{0}1 \\ & \sigma & \beta & \mu & \dot{1}0 \\ & \tau & \gamma & \nu & \dot{1}1 \end{array}$$

si presentano spontaneamente nel calcolo spinoriale in forma intrinseca e sono detti coefficienti di spin.

Alcuni di essi sono suscettibili di interessanti interpretazioni geometriche [6], [9], in riferimento alle geodetiche di lunghezza nulla.

In particolare, l'annullarsi di k è condizione caratteristica affinché ξ_0^A sia tangente in ogni punto ad una geodetica di lunghezza nulla, cosicché il coefficiente k si può interpretare come una specie di curvatura geodetica delle linee della congruenza individuata da ξ_0^A (o da λ_1^μ).

Nell'ipotesi $k = 0$, poi, ρ e σ risultano indipendenti da ξ_1^A e caratterizzano la deviazione geodetica fra geodetiche di lunghezza nulla vicine. Detta γ una geodetica di lunghezza nulla della congruenza individuata da ξ_0^A e considerato, in un suo punto P , un elemento piano bidimensionale π spaziale ed ortogonale a γ , vi è, nell'intorno di P , una doppia infinità di geodetiche della congruenza (ne sia γ' la generica) che intersecano π (nel generico punto P'). Attraverso lo studio dell'andamento della distanza fra una coppia di geodetiche γ e γ' , al variare di P lungo γ (e, precisamente, attraverso l'esame della derivata intrinseca ∂_{00} dell'affissa complessa z opportunamente attribuita al vettore $(P' - P)$), si dimostra che un fascetto di geodetiche di lunghezza nulla subisce, al variare di P , una divergenza ed una rotazione caratterizzate, rispettivamente, dalla parte reale ed immaginaria del coefficiente ρ , oltre ad una distorsione caratterizzata dal coefficiente σ . Si trova, infatti, che l'affissa z , nel passaggio da $P(r)$ a $P^*(r + dr)$ (essendo r un parametro affine lungo γ), subisce la variazione: $z^* - z = (-\rho z - \sigma \bar{z}) dr$. La variazione individuata da ρ muta una circonferenza di centro P (sezione di un fascetto con π) in un'altra circonferenza con il raggio variato e ruotata rispetto alla precedente (5); la variazione individuata da σ , invece, muta una circonferenza in un'ellisse (6).

L'annullarsi della rotazione ($\rho = \bar{\rho}$) è condizione caratteristica perché le geodetiche siano ortogonali (ed appartenenti) ad ipersuperfici nulle; si tratta di un caso notevole in riferimento ai fenomeni di propagazione per i quali ipersuperfici nulle e geodetiche caratterizzano fronti d'onda e raggi corrispondenti.

Per i coefficienti di spin ν , μ , λ , ovviamente, valgono considerazioni analoghe alle precedenti, allorché ci si riferisca alla congruenza individuata da ξ_1^A (o da λ_2^μ).

3. Equazioni del campo gravitazionale in diverse impostazioni.

Le equazioni gravitazionali einsteiniane nelle regioni vuote:

$$(3.1) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$$

(5) Posto $\rho dr = \alpha e^{i\varphi}$ (α infinitesimo) e detti δR la variazione del raggio R e $\delta\theta$ l'angolo di rotazione, risulta $\delta R/R = -\alpha \cos \varphi$; $\delta\theta = -\alpha \sin \varphi$.

(6) Posto $\sigma dr = \beta e^{i\psi}$ (β infinitesimo), i semiassi dell'ellisse risultano: $R(1 - \beta)$ ed $R(1 + \beta)$.

(essendo $R_{\mu\nu}$ il contratto del tensore di Riemann ed R l'invariante scalare di curvatura) si traducono spinorialmente nelle:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

che impongono, rispettivamente, l'annullarsi di uno dei due spinori di curvatura e la completa simmetria dell'altro (cfr. (1.13)).

Un primo modo di impostare, in termini spinoriali, la teoria della gravitazione consiste nell'assumere come variabili base atte a caratterizzare il campo le componenti σ_{AB}^μ dello spin-tensore fondamentale (che individua univocamente il tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$ dello spazio-tempo) e nel riguardare le (3.2) come equazioni differenziali del secondo ordine in dette variabili. (Ciò grazie alle (1.11) ed (1.12), tenuto conto delle definizioni di spin-tensore di curvatura e di connessione spinoriale.)

In quest'ordine di idee, conforme all'originaria impostazione di Weyl, oltreché di Infeld e Van der Waerden, ripresa in un secondo tempo da Bergmann [10], si riproduce in sostanza la tipica trattazione tensoriale del campo gravitazionale. Si affaccia pertanto spontanea la possibilità di dedurre le equazioni di campo dal classico principio variazionale di Einstein, opportunamente espresso in termini spinoriali [11]. Si possono in effetti ottenere le equazioni (3.2) dal principio variazionale:

$$(3.3) \quad \delta \int_{\tau} C_{\mu\nu AB} \sigma_{\dot{F}}^{\mu A} \sigma^{\nu \dot{F} B} d\tau = 0$$

(essendo τ una regione semplicemente connessa spazio-temporale), operando una variazione arbitraria sulle funzioni σ_{RS}^μ che, sul contorno di τ , ne rispetti i valori insieme a quelli delle derivate prime ordinarie. Ciò equivale a variare arbitrariamente sedici quantità reali; ma le variazioni dello spin-tensore fondamentale corrispondenti a trasformazioni locali infinitesime di Lorentz (esprimibili mediante le tre componenti complesse di un arbitrario spinore doppio simmetrico infinitesimo) non sono significative e danno quindi luogo a sei identità che riducono a dieci le equazioni di campo. Queste (le (3.2)) sono poi legate da quattro identità differenziali (le identità contratte del Bianchi in forma spinoriale):

$$(3.4) \quad \Phi_{SM\dot{R}\dot{L}}^{\dot{K}S} + \lambda_{\dot{L}M} = 0$$

che dipendono dall'invarianza dell'azione gravitazionale di fronte a cambiamenti di coordinate spazio-temporali e risultano pertanto deducibili dallo stesso princi-

pio variazionale (3.3) assumendo come variazione dello spin-tensore fondamentale quella indotta da un cambiamento infinitesimo di coordinate.

Un modo diverso di affrontare la trattazione spinoriale del campo gravitazionale consiste nell'adottare il punto di vista di Witten [5] e Penrose [12]: lo spin-tensore fondamentale ha allora soltanto l'ufficio di intermediario per collegare la teoria spinoriale con quella tensoriale, mentre le variabili base atte a caratterizzare il campo sono quantità puramente spinoriali: gli spinori di curvatura. E' in questa visione che si rivelano i caratteri tipici ed i pregi del formalismo spinoriale: si possono tuttavia ulteriormente distinguere due differenti impostazioni che pur si valgono di equazioni analoghe.

Seguendo il Penrose, si considerano equazioni di campo involgenti lo spinore gravitazionale, quadruplo, completamente simmetrico, a priori indipendente dalla curvatura, in uno spazio-tempo ove si ritengano soddisfatte le (3.2). Ponendosi, invece, da un punto di vista che riproduce quello adottato da Lichnerowicz nell'ambito puramente tensoriale, si possono stabilire equazioni di campo riguardanti direttamente uno degli spinori di curvatura di una varietà riemanniana spazio-temporale, assumendo le (3.2) come condizioni supplementari [13].

Con maggior dettaglio, ammesse verificate le (3.2), le curvature di V_4 risultano completamente individuate dal solo spinore quadruplo totalmente simmetrico ψ_{ABCD} (di curvatura conforme), caratterizzato dalle relazioni differenziali:

$$(3.5) \quad \psi_{ABCD}/\dot{R}^D = 0 \quad \text{e c.c.}$$

ottenute dalle identità di Bianchi (1.14), tenendo conto delle (3.2). Assunto quindi, col Penrose, a rappresentare il campo gravitazionale nelle regioni vuote uno spinore quadruplo completamente simmetrico, lo spinore gravitazionale φ_{ABCD} (a priori indipendente dalla curvatura), le equazioni:

$$(3.5') \quad \varphi_{ABCD}/\dot{R}^D = 0 \quad \text{e c.c.}$$

impongono che esso si identifichi con il solo spinore di curvatura non nullo nello spazio considerato. E' pure necessario, poiché si opera in uno spazio curvo, che siano soddisfatte, per le equazioni di campo (3.5'), delle «condizioni di consistenza», costituite da relazioni algebriche che impongono, anche a priori, un legame fra lo spinore campo φ_{ABCD} e quello di curvatura ψ_{ABCD} [6]:

$$(3.6) \quad \varphi^{CDEA} \psi_{CDE}^B + \varphi^{CDEB} \psi_{CDE}^A = 0 \quad \text{e c.c.}$$

e che risultano identicamente verificate per $\varphi_{ABCD} = \psi_{ABCD}$.

Le equazioni (3.5) sono formalmente simili a quelle del campo elettromagnetico neutro, nel vuoto, scritte in forma spinoriale:

$$(3.7) \quad \Phi_{CD}/\dot{R}^D = 0 \quad \text{e c.c.}$$

(essendo Φ_{CD} lo spinore doppio simmetrico corrispondente, secondo le (1.3), al tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu}$). Inoltre, come lo spinore energetico totale $\Phi_{AB} \Phi_{\dot{C}\dot{D}}$, a divergenza spinoriale nulla, corrisponde al tensore energetico totale elettromagnetico, così pure lo spinore $\psi_{ABCD} \psi_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$, a divergenza spinoriale nulla, corrisponde al tensore superenergia di Robinson-Bel [12], [14], [15], [16].

Si manifesta, così, una suggestiva analogia fra il campo dello spinore gravitazionale negli spazi vuoti ed il campo dello spinore elettromagnetico nel vuoto, in assenza di cariche e correnti; al di là dell'eleganza formale, detta analogia risulta di indubbia utilità nell'indagine sulla natura fisica dei due campi: questioni attinenti il campo gravitazionale possono essere trattate prendendo spunto dalla teoria del campo elettromagnetico. E' quanto avviene, tipicamente, nello studio delle direzioni principali, nonché nell'indagine sull'eventuale presenza di radiazione, come accenneremo più avanti.

L'altra impostazione delle equazioni di campo indicata in precedenza, consiste nell'assumere come equazioni del campo gravitazionale, nelle regioni vuote, le:

$$(3.8) \quad \chi_{ABCD}/\dot{R}^D = 0 \quad \text{e c.c.}$$

accanto alle identità di Bianchi spinoriali (1.14), riguardate come equazioni e nel considerare le (3.2) come condizioni supplementari che, imposte su una ipersuperficie di tipo spaziale, risultano verificate in tutta la regione spazio-temporale considerata. Mentre le (1.14) impongono che i due spinori χ_{ABCD} e $\Phi_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$ (dotati delle consuete simmetrie (1.6) ed (1.7)) siano gli spinori di curvatura della varietà riemanniana V_4 considerata, le (3.8) (analoghe alle (3.5')) sono le equazioni cui deve soddisfare lo spinore di curvatura ad indici non puntati (non completamente simmetrico) della V_4 affinché questa possa identificarsi con uno spazio vuoto di Einstein (7). L'identificazione è subordinata all'imposizione delle condizioni supplementari (3.2). Le (3.8) sono poi legate dalle identità differenziali:

$$(3.9) \quad \chi_{ABCD}/\dot{R}^{D\dot{R}C} = 0 \quad \text{e c.c.}$$

Con un procedimento che si ispira a quello con cui si possono dedurre le (3.7) del campo elettromagnetico [17], sia le equazioni di campo (3.5'), sia le (3.8) (ammesse verificate le (1.14)) si possono far discendere da un principio di azione stazionaria

$$\delta \int_{\tau} \mathcal{L} d\tau = 0,$$

(7) Separando la parte completamente simmetrica nei tre indici $A B C$, le (3.8) si possono a loro volta spezzare nelle (3.5) e nelle: $\lambda_{\dot{R}B} = 0$.

del tutto distinto da quello (3.3). In entrambi i casi ci si vale di una densità lagrangiana $\mathcal{L}$ funzione quadratica dello spinore campo e del suo coniugato, ma le quantità aventi ruolo di potenziali su cui operare le variazioni arbitrarie si presentano in modi nettamente distinti [18], [13].

Nel caso, infatti, delle (3.5') si introduce opportunamente un potenziale spinore $\eta_{AB\dot{R}C}$, simmetrico nei tre indici non puntati e, nel dedurre le equazioni di campo, si dimostra ad un tempo che lo spinore gravitazionale, ossia lo spinore di curvatura ψ_{ABCD} , è deducibile da un siffatto potenziale, secondo le:

$$(3.10) \quad \psi_{ABCD} = \eta_{(AB} \dot{C} / \dot{R} D)$$

(la parentesi attorno agli indici indica simmetrizzazione).

Si ottengono, invece, le (3.8) operando una variazione arbitraria sulla connessione spinoriale che non alteri lo spin-tensore fondamentale. Risulta allora:

$$(3.11) \quad \delta \chi_{ABCD} = \frac{1}{2} (\delta \Gamma_{AB} \dot{R} C / \dot{R} D + \delta \Gamma_{AB} \dot{R} D / \dot{R} C)$$

e va rilevato che solo le variazioni dello spinore di curvatura sono esprimibili mediante le derivate spinoriali delle variazioni della connessione, conformemente col fatto che le variazioni $\delta \Gamma_{AB\dot{R}C}$ hanno carattere di spinori, a differenza della connessione $\Gamma_{AB\dot{R}C}$.

Non così avviene se si opera in forma intrinseca: le componenti di diade dello spinore di curvatura sono allora esprimibili direttamente mediante i coefficienti di spin $\Gamma_{ab\dot{r}c}$ e le loro derivate intrinseche. Ai coefficienti di spin, pertanto, compete propriamente il ruolo di potenziali del campo.

Senza addentrarmi nei particolari, per i quali rimando a lavori specifici [13], [19], voglio segnalare che l'operare sulle componenti di diade, sebbene comporti un notevole appesantimento formale, tuttavia si manifesta opportuno nel dedurre le identità differenziali (3.9). Queste, espresse in forma intrinseca, discendono infatti dall'invarianza dell'azione per cambiamenti della diade di riferimento equivalenti a trasformazioni locali infinitesime di Lorentz:

$$(3.12) \quad \delta \xi_a^A = \omega_{ab} \xi^{bA}$$

(con $\omega_{ab} = \omega_{ba}$ infinitesimi arbitrari, funzioni del posto e nulli sul contorno).

Nell'ambito spinoriale, invece, si possono ottenere le (3.9) sfruttando l'invarianza della densità lagrangiana, e quindi dell'azione, di fronte ad una variazione della connessione spinoriale, che non alteri lo spin-tensore fondamentale, del tipo:

$$(3.13) \quad \delta \Gamma_{AB\dot{R}S} = \omega_{AB/\dot{R}S}$$

(con ω_{AB} spinore doppio simmetrico, infinitesimo arbitrario).

L'invarianza per la trasformazione (3.13), analoga all'invarianza di gauge

dell'azione di puro campo elettromagnetico, nel vuoto, nella rappresentazione spinoriale, è direttamente verificabile sulla $\mathcal{L}$, ma è riconducibile all'invarianza per trasformazioni locali infinitesime di Lorentz soltanto uscendo dall'ambito puramente spinoriale e valendosi della rappresentazione spin-tensoriale della curvatura.

Variazioni del tipo (3.13) permettono anche la deduzione delle condizioni di consistenza (3.6) per le equazioni di campo (3.5').

Il confronto delle (3.10) con le (3.11) suggerisce infatti di collegare le variazioni del potenziale dello spinore gravitazionale a variazioni della connessione spinoriale che non alterino lo spin-tensore fondamentale, secondo le:

$$(3.14) \quad \delta \eta_{AB}^{\dot{R}}{}^C = \delta \Gamma_{(AB}^{\dot{R}}{}_{C)}$$

attribuendo così un significato geometrico alle variazioni del potenziale $\eta_{AB}^{\dot{R}}{}^C$. Si perviene alle condizioni di consistenza (3.6), mediante variazioni del potenziale del tipo:

$$(3.15) \quad \delta \eta_{AB}^{\dot{R}}{}^C = \omega_{(AB}^{\dot{R}}{}_{C)}$$

sfruttando il tipo particolare di variazione subita dall'azione, nonché il suo legame con la curvatura dello spazio in cui si opera.

Quanto si è detto sulla struttura analitica delle equazioni gravitazionali spinoriali nelle regioni vuote, si può opportunamente estendere al caso in cui sussista una distribuzione di materia e di energia.

Le equivalenti spinoriali delle equazioni einsteiniane risultano allora:

$$(3.16) \quad \Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \lambda \epsilon_{AB} \epsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \kappa T_A{}^{\dot{C}}{}_{\dot{B}}{}^{\dot{D}}$$

essendo $T_{A\dot{C}\dot{B}\dot{D}}$ lo spinore energetico e κ la costante gravitazionale.

Considerate, accanto alle (3.16), le equazioni ottenute dalle identità di Bianchi tenendo conto delle (3.16) stesse, si possono ancora interpretare le equazioni di campo nei diversi modi, stabilendo anche opportune deduzioni variazionali. Richiamo qui solo un risultato di un certo interesse, ottenuto recentemente [20].

Mediante la deduzione variazionale delle identità di Bianchi riguardate come equazioni, si dimostra la possibilità di esprimere entrambi gli spinori di curvatura di una varietà riemanniana V_4 mediante le derivate spinoriali di un opportuno spinore potenziale $H_{AB\dot{R}}^{\dot{C}}$ (simmetrico in AB , hermitiano in $\dot{R}\dot{C}$ e soddisfacente le condizioni: $H_{AB\dot{C}}^{\dot{B}} = H_{\dot{C}\dot{B}A}^{\dot{B}}$), le cui variazioni infinitesime sono direttamente collegate a variazioni infinitesime della connessione spinoriale che non tocchino lo spin-tensore fondamentale. Ne segue, in particolare, per lo spinore di curvatura conforme, l'espressione (3.10) mediante la parte completamente simmetrica, nei tre indici non puntati, dello spinore potenziale: $H_{(AB}^{\dot{R}}{}_{C)} \equiv \eta_{AB}^{\dot{R}}{}^C$; tale espres-

sione risulta pertanto valida, oltre che nelle regioni vuote, anche in presenza di materia e di energia.

In linguaggio tensoriale, il risultato precedente (che ne estende uno del Lanczos relativo al tensore di Weyl) si traduce nella possibilità di esprimere il tensore di Riemann di una V_4 mediante le derivate covarianti di un opportuno tensore triplo, dotato di certe simmetrie, che ha l'ufficio di potenziale del campo del tensore di curvatura. Detto potenziale, una cui variazione infinitesima si può collegare ad una variazione della connessione che non tocchi la metrica, non è esprimibile localmente in termini del tensore fondamentale e delle sue derivate, ma dipende globalmente dalla geometria della varietà.

Dato il profondo significato del tensore di Riemann nella teoria relativistica della gravitazione, sto attualmente indagando sul significato fisico del suo potenziale, anche in relazione a questioni energetiche.

4. Le equazioni di Newman e Penrose.

Qualche parola a parte merita l'impostazione delle equazioni gravitazionali secondo Newman e Penrose [8]. Si tratta di un gruppo di equazioni particolarmente adatte per la determinazione di soluzioni, nonché per l'esame delle proprietà delle soluzioni stesse.

Assunte come variabili di campo sia le componenti intrinseche σ^μ_{ab} dello spintensore fondamentale, sia i coefficienti di spin Γ_{abcd} , sia le componenti intrinseche dello spinore di curvatura conforme ψ_{abcd} , si considerano come equazioni di campo, per le regioni vuote, accanto alle (3.5) espresse in forma intrinseca (8) (a), anche le relazioni che legano la curvatura ψ_{abcd} alla connessione Γ_{abcd} (b) e questa alla tetraide σ^μ_{ab} (c).

Non mi soffermo sulla formulazione esplicita dei tre gruppi di equazioni, che ho indicato per comodità con a , b e c . Tali equazioni sono state analizzate e discusse da vari Autori; ricordo, in particolare, gli studi al riguardo di Carmeli e di Papapetrou.

Il primo ha dedotto, fra l'altro, le equazioni del gruppo a e b da un principio di azione stazionaria basandosi sull'analogia, previamente evidenziata, con la teoria dei campi di Yang-Mills [21], [22]. Anche in questa deduzione, che si discosta nel metodo da quella sopra ricordata, assumono ruolo di potenziali del campo i coefficienti di spin.

Una analisi approfondita delle equazioni a , b e c , con ricerca delle relative identità, è stata fatta da Papapetrou [23], [24]. Egli ha sottolineato che le varia-

(8) La condizione $\lambda = 0$ viene già imposta, così come le $\phi_{ab}\dot{c}\dot{d} = 0$.

bili di campo introdotte formano un sistema completo e che le equazioni del gruppo c , chiamate equazioni metriche da qualche Autore ed equivalenti a quelle che traducono le formule di commutazione delle derivate seconde intrinseche (rispetto agli indici di diade) di uno scalare, costituiscono parte essenziale del formalismo. Lo stesso Autore ha poi distinto le equazioni in principali, supplementari e banali.

5. Direzioni principali. Classificazione spinoriale.

Uno dei problemi nei quali la trattazione spinoriale si rivela come il metodo più potente e rapido di indagine, consiste nella definizione e determinazione delle direzioni principali del campo gravitazionale, in analogia a quelle del campo elettromagnetico.

Per quanto concerne il campo elettromagnetico nel vuoto, esistono, come noto, in ogni punto, due direzioni principali nulle, reali del tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ che risultano principali anche per il tensore energetico $E_{\mu\nu}$ [25]. Tali direzioni, di particolare interesse per lo studio della struttura del campo, sono poi coincidenti nel caso notevole di campo nullo (caratterizzato dall'annullarsi dei due invarianti quadratici di prima e seconda specie del tensore elettromagnetico) e individuano la direzione di avanzamento per un'onda piana che viaggia con la velocità della luce. La caratterizzazione delle direzioni principali nulle si presenta immediata nel linguaggio spinoriale, attraverso la decomposizione dello spinore campo elettromagnetico Φ_{AB} nel prodotto simmetrizzato di due spinori semplici:

$$(5.1) \quad \Phi_{AB} = \mu_{(A} \eta_{B)}$$

I due spinori così ottenuti sono definiti a meno di fattori numerici complessi che però non alterano le direzioni dei due vettori reali nulli ad essi corrispondenti, secondo le (1.9); direzioni che coincidono con quelle principali del tensore $F_{\mu\nu}$.

Per il campo gravitazionale, analogamente, si definiscono direzioni principali nulle le quattro direzioni reali appartenenti al cono luce individuate dai quattro spinori semplici ottenibili dallo spinore gravitazionale mediante la scomposizione:

$$(5.2) \quad \psi_{ABCD} = \alpha_{(A} \beta_B \gamma_C \delta_{D)}$$

che si dimostra essere sempre possibile ed unica, a meno di fattori numerici. Dette direzioni risultano principali anche per lo spinore superenergia $\psi_{ABCD} \psi_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$; si può anzi osservare che il legame fra direzioni principali nulle e spinore energetico è più intimo di quello fra le direzioni stesse e lo spinore campo gravitazionale: ad esempio, una variazione di fase φ di uno degli spinori principali

(rotazione di 2φ della bandiera), non altera né la direzione principale, né lo spinore superenergia, mentre altera lo spinore campo.

Si può stabilire una classificazione per lo spinore gravitazionale (negli spazi vuoti di Einstein), in base alle eventuali coincidenze fra le direzioni principali nulle [12], [26], [27].

Precisamente, nelle notazioni di Penrose, sono da distinguersi i seguenti casi: $[1\ 1\ 1\ 1]$ se le quattro direzioni sono tutte distinte; $[2\ 1\ 1]$, $[3\ 1]$, $[4]$ se due, tre, o tutte e quattro le direzioni coincidono; $[2\ 2]$ se coincidono due a due; si ha infine il caso, indicato col simbolo $[-]$, in cui le direzioni non sono definite perché ψ_{ABCD} è nullo.

Tale classificazione si differenzia da quella ben nota di Petrov, che si basa su una diversa definizione di direzioni principali del tensore di Riemann, per $R_{\mu\nu} = 0$ (ossia, del tensore di Weyl) [28].

Secondo Petrov, si distinguono tre tipi di campo gravitazionale che corrispondono rispettivamente a: quattro direzioni principali distinte, di cui una temporale e tre spaziali (tipo I); due direzioni principali coincidenti nulle e due spaziali (tipo II); quattro direzioni principali coincidenti nulle (tipo III).

Senza soffermarmi sul confronto fra le due classificazioni e sulle relazioni che intercedono fra le due diverse quaterne di direzioni principali, rilevo che la classificazione di Penrose risulta più dettagliata di quella di Petrov: per ogni tipo di Petrov, si hanno infatti casi diversi di Penrose, secondo che gli invarianti quadratico e cubico I ed J dello spinore gravitazionale ($I = \psi_{ABCD} \psi^{ABCD}$; $J = \psi_{ABCD} \psi^{CD}_{EF} \psi^{ABEF}$) soddisfino determinate condizioni.

Quanto precede si può riassumere nello schema:

	tipo I	tipo II	tipo III
$I^3 \neq 6J^2$	$[1\ 1\ 1\ 1]$		
$I^3 = 6J^2 \neq 0$	$[2\ 2]$	$[2\ 1\ 1]$	
$I = J = 0$	$[-]$	$[4]$	$[3\ 1]$

Osservo poi che una classificazione del tensore di Weyl equivalente a quella di Penrose, ma ottenuta indipendentemente e con procedimento del tutto distinto, è dovuta a Debever [26]: i vettori nulli di Debever, definiti per via tensoriale, corrispondono agli spinori semplici di Penrose. Il metodo spinoriale, però, si presenta come più rapido ed elegante.

L'interesse fisico di queste classificazioni, legato principalmente al problema della radiazione gravitazionale, fu rilevato per la prima volta, con riferimento alla classificazione di Petrov, da Pirani [29]. Si deve a questo Autore una prima definizione di radiazione gravitazionale, basata sulla generalizzazione del concetto

di osservatore che segue il campo (osservatore la cui velocità spazio-temporale, in analogia al caso del campo elettromagnetico, sia diretta secondo una direzione principale del tensore di Riemann). La definizione portava a concludere che ci potesse essere presenza di radiazione gravitazionale solo quando il campo fosse di tipo II o III di Petrov. Dette condizioni vennero successivamente riconosciute valide solo asintoticamente, mentre la definizione di radiazione gravitazionale veniva opportunamente modificata (in quanto troppo restrittiva e non applicabile a distanza finita dalle sorgenti) [30], [31], [32]. Per un bel-l'inquadrimento di tali questioni, rimando a un articolo dello stesso Pirani [33].

Seguendo l'impostazione spinoriale del Penrose, l'analogia col campo elettromagnetico fornisce nel modo più diretto la possibilità di caratterizzare la presenza di radiazione gravitazionale. Poiché nel campo elettromagnetico, infatti, si ha presenza di radiazione quando le due direzioni principali nulle dello spinore campo Φ_{AB} coincidono, nel campo gravitazionale ci si può attendere radiazione quando almeno due delle direzioni principali nulle dello spinore ψ_{ABCD} coincidono, nel qual caso il campo viene detto algebricamente speciale. Scartati, però, i casi [2 2], perché in esso rientra la soluzione di Schwarzschild, e quello [2 1 1] che conterrebbe il precedente come caso particolare, si conclude che ci si può attendere presenza di radiazione gravitazionale nei casi [3 1] e [4] (e quindi in corrispondenza all'annullarsi degli invarianti di curvatura I ed J).

Si tratta dei casi che il Sachs indica come semiradiativo e radiativo nei suoi fondamentali studi sulla propagazione delle azioni gravitazionali, per sola radiazione uscente (e cioè, in assenza di radiazione proveniente dall'infinito che si sovrapponga a quella uscente dalla sorgente, di dimensioni finite, del campo considerato) e sotto opportune ipotesi di spazio-tempo piatto all'infinito [32], [34], [35].

Uno dei più caratteristici risultati di tali indagini è costituito dal teorema cosiddetto di «peeling off» che esprime il comportamento della struttura algebrica del tensore di curvatura al variare della distanza, opportunamente definita, dalla sorgente. Riservandomi di tornare su detto teorema, segnalo un altro concetto importante introdotto dallo stesso Autore e collegato alla propagazione: quello di raggi geodetici.

Il campo ammette raggi geodetici se almeno una delle direzioni principali nulle di curvatura è tangente ad una congruenza di geodetiche nulle. Ciò può avvenire per metriche algebricamente generali (tipo [1 1 1 1]) e si verifica sempre nei casi algebricamente speciali: un teorema di Goldberg e Sachs stabilisce, anzi, che in uno spazio vuoto, una metrica è algebricamente speciale se e solo se ammette una congruenza di geodetiche nulle senza distorsione.

6. Diadi particolari o adattate a coordinate particolari.

L'uso di diadi con uno degli spinori (o con entrambi) coincidenti con direzioni principali dello spinore gravitazionale ψ_{ABCD} , ne semplifica notevolmente le componenti intrinseche.

Così, se ξ_0^A individua una delle direzioni principali nulle di ψ_{ABCD} , segue (per le (5.2), con $\alpha_A \equiv \xi_{0A}$):

$$(6.1) \quad \psi_{0000} \equiv \psi_{ABCD} \xi_0^A \xi_0^B \xi_0^C \xi_0^D = 0$$

Se poi la direzione principale è doppia, oltre a ψ_{0000} (che indicheremo per brevità con ψ_0), si annulla anche $\psi_{1000} \equiv \psi_1$.

Nei casi particolari in cui lo spinore ψ_{ABCD} sia di tipo [4], [3 1] o [2 2], ci si può ridurre pertanto ad una sola componente intrinseca diversa da zero. Difatti, se è del tipo [4], con direzione principale ξ_0^A (o ξ_1^A), solo la componente $\psi_{1111} \equiv \psi_4$ (o ψ_0) risulta diversa da zero; se è del tipo [3 1], con direzioni principali ξ_0^A e ξ_1^A , di cui la ξ_0^A (o la ξ_1^A) multipla, solo la componente $\psi_{1110} \equiv \psi_3$ (o ψ_1) risulta diversa da zero; se, infine, è del tipo [2 2], con direzioni principali ξ_0^A e ξ_1^A , la sola componente diversa da zero è $\psi_{1100} \equiv \psi_2$.

L'opportuna scelta di diadi consente una elegante dimostrazione del teorema di Goldberg e Sachs, cui si è precedentemente accennato. Si dimostra, precisamente, che da $k = 0$ e $\sigma = 0$ (ξ_0^A tangente ad una congruenza di geodetiche nulle senza distorsione) segue $\psi_0 = \psi_1 = 0$ e viceversa [8]. Ciò significa che una congruenza di geodetiche nulle senza distorsione individua i raggi geodetici di un campo algebricamente speciale e viceversa.

Più in generale, le condizioni $k = 0$ e $\psi_0 = 0$ esprimono sinteticamente l'esistenza di raggi geodetici.

Altre utili semplificazioni si ottengono valendosi di tetradi e diadi adattate a coordinate particolari (coordinate di Robinson e Trautman [36]).

Considerata in V_4 una famiglia di ipersuperfici nulle $u = \text{cost.}$ (tali che $g^{\mu\nu} u_{,\mu} u_{,\nu} = 0$), i vettori $\lambda_1^\mu = g^{\mu\nu} u_{,\nu}$ risultano tangenti ad una congruenza di geodetiche di lunghezza nulla, appartenenti alle ipersuperfici stesse. Detto r un parametro affine lungo tali geodetiche, si assumono come coordinate: $x^0 = u$, $x^1 = r$ e due parametri x^2 ed x^3 atti a individuare le geodetiche su ogni ipersuperficie $u = \text{cost.}$ I coefficienti della metrica soddisfano allora le condizioni $g^{0\alpha} \equiv \delta_1^\alpha$ (delta di Kronecker), cosicché risulta:

$$(6.2) \quad \lambda_{1\mu} = \delta_\mu^0; \quad \lambda_1^\mu = \delta_1^\mu$$

Si scelgono poi i vettori $\lambda_2^\mu, \lambda_3^\mu, \lambda_4^\mu \equiv \bar{\lambda}_3^\mu$ in modo che siano soddisfatte le condizioni di ortonormalità (2.4); si pone precisamente:

$$(6.3) \quad \lambda_2^\mu = \delta_0^\mu + U \delta_1^\mu + X^i \delta_i^\mu \quad (\text{con } i = 2, 3)$$

$$(6.4) \quad \lambda_3^\mu = \omega \delta_1^\mu + \zeta^i \delta_i^\mu \quad \text{e c.c.}$$

(essendo le quantità reali U ed X^i e quelle complesse ω e ζ^i funzioni arbitrarie delle coordinate), dal che seguono per i coefficienti della metrica con indici non nulli le espressioni:

$$(6.5) \quad \begin{cases} g^{11} = 2(U - \omega \bar{\omega}) \\ g^{1i} = X^i - (\bar{\omega} \zeta^i + \omega \bar{\zeta}^i) \\ g^{ij} = -(\zeta^i \bar{\zeta}^j + \zeta^j \bar{\zeta}^i) \end{cases} \quad (\text{con } i, j = 2, 3)$$

Imposto quindi che i vettori $\underline{\lambda}$ si trasportino per parallelismo lungo λ_1^μ , e associata, secondo le convenzioni già richiamate, una diade alla tetradе così ottenuta, si hanno per i coefficienti di spin le condizioni:

$$(6.6) \quad \kappa = \pi = \epsilon = 0; \quad \rho = \bar{\rho}; \quad \tau = \bar{\alpha} + \beta.$$

Le equazioni di Newman e Penrose vengono usualmente trattate nella veste semplificata che consegue alle (6.6). Si tratta sempre, tuttavia, di un formalismo piuttosto pesante, dato l'elevato numero di equazioni.

Queste si spezzano, però, in due gruppi: le equazioni radiali e quelle non radiali. Le prime contengono le derivate parziali $\partial/\partial r \equiv D$ delle funzioni incognite. Nelle rimanenti, compaiono gli operatori differenziali più complicati:

$$(6.7) \quad \Delta \equiv \frac{\partial}{\partial u} + U \frac{\partial}{\partial r} + X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$(6.8) \quad \delta \equiv \omega \frac{\partial}{\partial r} + \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e c.c.}$$

(Si è posto: $D \equiv \partial \equiv \partial_{00}$; $\Delta \equiv \partial_2 \equiv \partial_{11}$; $\delta \equiv \partial_3 \equiv \partial_{10}$).

L'integrazione delle equazioni radiali fornisce la dipendenza esplicita delle funzioni incognite da r , a meno di arbitrarie funzioni delle altre variabili u ed x^i . Queste funzioni vengono quindi determinate operando sulle equazioni non radiali.

Accenneremo ad alcune soluzioni esatte particolari delle equazioni gravitazionali, ottenute con detto procedimento. Ci riferiremo, in particolare, a soluzioni corrispondenti a metriche che ammettono raggi geodetici.

Prima di addentrarmi in questo argomento, però, in relazione al comportamento asintotico del campo gravitazionale, ricordo che la particolarizzazione del riferimento che conduce alle (6.6) permette a Newman e Penrose di dimostrare che, in uno spazio-tempo vuoto, sotto opportune ipotesi di spazio-tempo piatto all'infinito (lievemente più generali di quelle del Sachs), lo spinore gravitazionale presenta la caratteristica proprietà di «peeling off».

Precisamente, allontanandosi dalla sorgente con l'aumentare del parametro affine r (lungo le geodetiche di lunghezza nulla γ tangenti a ξ_0^A), supposto ψ_0 infinitesimo dell'ordine di r^{-5} :

$$(6.9) \quad \psi_0 = 0 (r^{-5})$$

(accanto ad altre ipotesi sulle quali non mi soffermo), si deduce:

$$(6.10) \quad \psi_1 = 0 (r^{-4}); \psi_2 = 0 (r^{-3}); \psi_3 = 0 (r^{-2}); \psi_4 = 0 (r^{-1}).$$

Si può cioè riguardare lo spazio-tempo diviso in cinque regioni: una vicina alla sorgente, nella quale tutte le componenti sono significative (e le direzioni principali nulle sono indipendenti da γ), tre zone intermedie di transizione, nelle quali ψ_0 , ψ_1 e ψ_2 diventano trascurabili una dopo l'altra (e, rispettivamente, una o due o tre direzioni principali diventano tangenti a γ) e, finalmente, la zona di pura radiazione, dove solo ψ_4 rimane importante (e le quattro direzioni principali coincidono in direzione di γ).

L'analogia con il campo elettromagnetico è perfetta: si hanno, in tal caso, tre zone corrispondenti a termini dell'ordine r^{-3} , r^{-2} , r^{-1} , con nessuna, una o due direzioni principali nulle orientate in direzione di γ .

7. Soluzioni con raggi geodetici ortogonali ad ipersuperfici nulle.

Si deve a Newman e Tamburino [37] la determinazione di metriche che posseggono fasci di raggi geodetici ortogonali ad ipersuperfici nulle (cioè, con rotazione nulla: $\rho = \bar{\rho}$), con divergenza non nulla ($\rho \neq 0$).

Gli Autori trattano dapprima il caso (I) di distorsione nulla ($\sigma = 0$), ritrovando, col metodo spinoriale, le soluzioni di Robinson e Trautman; considerano, quindi, il caso più generale (II) con distorsione diversa da zero ($\sigma \neq 0$).

Il riferimento assunto è quello indicato in precedenza, cosicché valgono le (6.6). A queste, vanno poi aggiunte, rispettivamente, le:

$$(7.1) \quad \sigma = 0; \quad \psi_0 = \psi_1 = 0$$

nel caso I, algebricamente speciale per il teorema di Goldberg e Sachs, e la:

$$(7.2) \quad \psi_0 = 0$$

nel caso II.

Inoltre, negli sviluppi di calcolo, si ottengono semplificazioni e si impongono opportune condizioni, disponendo della arbitrarietà di trasformazioni di coordinate o di tetradi (e diadi) che rispettano le (6.6), così come le (7.1).

La particolarizzazione del riferimento che conduce alle (6.6), difatti, permette ancora le seguenti trasformazioni di coordinate:

$$(7.3) \quad u' = u; \quad x'^i = x^i; \quad r' = r + R(x^0, x^2, x^3)$$

$$(7.4) \quad x'^i = x^i; \quad u' = f(u); \quad r' = r / df/du$$

$$(7.5) \quad u' = u; \quad r' = r; \quad x'^i = x^i(x^0, x^2, x^3)$$

che equivalgono, rispettivamente: la (7.3), ad un cambiamento di origine del parametro affine r su ciascuna geodetica γ ; la (7.4), ad un cambiamento di nome delle ipersuperficie $u = \text{cost.}$ (con corrispondente trasformazione di r , per mantenere le condizioni (6.2)); la (7.5), ad un cambiamento di nome delle geodetiche γ .

Così pure, rispettando le (6.6) e le (7.1), sono consentite le seguenti trasformazioni di tetradi (o di diadi):

$$(7.6) \quad \begin{cases} \lambda_1'^{\mu} = \lambda_1^{\mu} \\ \lambda_2'^{\mu} = \lambda_2^{\mu} + B \bar{B} \lambda_1^{\mu} + B \lambda_3^{\mu} + \bar{B} \bar{\lambda}_3^{\mu} \\ \lambda_3'^{\mu} = \bar{B} \lambda_1^{\mu} + \lambda_3^{\mu} \quad \text{e c.c.} \end{cases}$$

$$(7.6') \quad \begin{cases} \xi_{0A}' = \xi_{0A} \\ \xi_{1A}' = B \xi_{0A} + \xi_{1A} \end{cases}$$

(con B parametro complesso, indipendente da r);

$$(7.7) \quad \begin{cases} \lambda_1'^{\mu} = \lambda_1^{\mu} \\ \lambda_2'^{\mu} = \lambda_2^{\mu} \\ \lambda_3'^{\mu} = e^{iC} \lambda_3^{\mu} \quad \text{e c.c.} \end{cases}$$

$$(7.7') \quad \begin{cases} \xi_{0A}' = \xi_{0A} e^{iC/2} \\ \xi_{1A}' = \xi_{1A} e^{-iC/2} \end{cases}$$

(con C parametro reale, indipendente da r).

Le prime vengono dette rotazioni nulle (attorno a λ_1^{μ}) e, come risulta più evidente dalla espressione (7.6') in termini di diadi, non alterano la bandiera di ξ_0^A ; le seconde costituiscono le rotazioni spaziali e comportano una rotazione di entrambe le bandiere della diade, mentre ne lasciano ferme le aste.

1) Distorsione nulla.

Nelle ipotesi (6.6) e (7.1), si perviene ad esprimere i coefficienti della metrica (previa determinazione della tetrade), i coefficienti di spin e le componenti di diade dello spinore gravitazionale, mediante la coordinata r e due funzioni reali: una $\psi_2^0(u)$ ed una $P(u, x^2, x^3)$ legate dalla relazione differenziale:

$$(7.8) \quad \frac{d\psi_2^0}{du} - 3 \psi_2^0 \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial u} = P^2 \nabla \bar{\nabla} U^0$$

(essendo

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial x^3} \quad \text{ed } U^0 = -P^2 \nabla \bar{\nabla} \log P).$$

Si ritrova la classe di metriche ottenute da Robinson e Trautman valendosi del formalismo tensoriale [36], [38] (9). Le varie soluzioni, corrispondenti a opportune particolarizzazioni delle funzioni ψ_2^0 e P , sono note e ampiamente discusse: alcune di esse sembrano atte a rappresentare un tipo di radiazione sferica. Non mi soffermo sulle possibili interpretazioni, né sulla questione delle singolarità sugli eventuali fronti d'onda. Accenno solo, a illustrazione della espressività del metodo spinoriale, alla classificazione delle soluzioni particolari che si può così riassumere:

$$\begin{aligned} \psi_2^0 = 0 & \begin{cases} \nabla U^0 = 0 \rightarrow [4] \text{ (o spazio-tempo piatto)} \\ \nabla U^0 \neq 0 \rightarrow [3 \ 1] \end{cases} \\ \psi_2^0 \neq 0 & \begin{cases} \nabla U^0 = 0 \rightarrow [2 \ 2] \text{ (in part. soluz. Schwarzschild)} \\ \nabla U^0 \neq 0 \rightarrow [2 \ 1 \ 1] \text{ (o anche } [2 \ 2]) \end{cases} \end{aligned}$$

Almeno in alcuni casi, detta classificazione risulta immediata, ben diversamente da quanto avviene in forma tensoriale. Poiché, difatti, le componenti dello spinore gravitazionale sono così espresse:

$$(7.9) \quad \begin{cases} \psi_2 = \psi_2^0 / r^3 \\ \psi_3 = \psi_3^0 / r^2 \text{ con } \psi_3^0 = P \bar{\nabla} U^0 \\ \psi_4 = \psi_4^0 / r - [P \bar{\nabla} \psi_3^0 + P (\bar{\nabla} \log P) \psi_3^0] / r^2 \end{cases}$$

$$\text{con } \psi_4^0 = -\bar{\nabla} \left[P^2 \nabla \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial u} \right) \right]$$

tenendo conto delle (7.1), segue immediatamente che l'annullarsi di ψ_2^0 comporta

(9) Nelle loro notazioni, ψ_2^0 ed U^0 sono, rispettivamente, $-m$ e $-K/2$, essendo m interpretabile come massa della sorgente del campo e K/r^2 la curvatura gaussiana di una superficie $r = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$

$\psi_2 = 0$ e quindi la coincidenza di almeno tre direzioni principali: caso [3 1]. Se, inoltre, $\nabla U^0 = 0$ (e quindi $\bar{\nabla} U^0 = 0$), si annullano anche ψ_3^0 e ψ_3 , cosicch  la quarta direzione principale va pure a coincidere: caso [4].

Quanto poi alla componente ψ_4 , nell'ipotesi di $\psi_3^0 = 0$, essa si annulla con ψ_4^0 e cio  se vale la condizione ⁽¹⁰⁾:

$$(7.10) \quad \bar{\nabla} \left[P^2 \nabla \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial u} \right) \right] = 0$$

Cos  il caso [4], se vale la (7.10), si riduce allo spazio-tempo piatto.

Per $\psi_2^0 \neq 0$, il discorso   meno immediato.

Osservato che, con un cambiamento di coordinate del tipo (7.4), ci si pu  sempre ridurre a $\psi_2^0 = 1$, dalla (7.8) si deduce che $\nabla U^0 = 0$ (e quindi $\bar{\nabla} U^0 = 0$) comporta l'indipendenza di P da u ; ne segue che U^0   costante, nonch  il verificarsi della (7.10), ossia l'annullarsi di ψ_4 oltrech  di ψ_3 . La soluzione   pertanto del tipo [2 2] con la seconda direzione principale in direzione di ξ_1^A (e contiene, come caso particolare, la soluzione di Schwarzschild).

Finalmente, per $\psi_2^0 \neq 0$ e $\nabla U^0 \neq 0$, si ha il caso [2 1 1], perch  $\psi_3 \neq 0$; questo potrebbe perch  degenerare in [2 2] con la seconda direzione principale diversa da ξ_1^A . Occorrerebbe qui una discussione pi  complicata, nella quale non mi addentro.

II) Distorsione diversa da zero.

Supposto $\sigma \neq 0$ per ottenere metriche algebricamente generali (tipo [1 1 1 1], con una sola direzione principale di curvatura tangente ai raggi geodetici: $\psi_0 = 0$), si distinguono due sottocasi, secondo le ipotesi $\rho^2 \neq \sigma \bar{\sigma}$ e $\rho^2 = \sigma \bar{\sigma}$. Si hanno, in corrispondenza, soluzioni di classe sferica o di classe cilindrica, secondo quanto ha rilevato il Sachs [32] nello studio delle metriche dotate di raggi geodetici.

I calcoli sono ovviamente pi  complicati che nel caso I, non solo per termini aggiuntivi nelle equazioni, ma anche per la presenza di ulteriori equazioni che, per $\sigma = 0$, erano identicamente verificate.

Nel caso sferico, non tutte le incognite sono ottenute in termini finiti; per alcune si fa uso di sviluppo in serie di potenze di $1/r$, arrestando lo sviluppo alle potenze minime. La soluzione cui si perviene contiene una sola costante arbitraria e, come caso limite per $\sigma \rightarrow 0$, porta allo spazio-tempo piatto.

Nel caso cilindrico, la soluzione   complicata, contiene funzioni ellittiche, ma   in forma finita per tutte le incognite. Risulta indipendente da x^3 e contiene due costanti arbitrarie.

⁽¹⁰⁾ Si osservi che la (7.10) coincide con la condizione $n = 0$ di Robinson e Trautman.

Le soluzioni ottenute, sia nel caso sferico, sia nel caso cilindrico, come rilevato dagli stessi Autori, costituiscono una classe molto ristretta. Esse infatti non dipendono da funzioni arbitrarie, ma solo da costanti e pertanto non sembrano adatte a descrivere un campo radiativo.

8. Soluzioni con raggi geodetici.

Ancora a Newman e Tamburino, in collaborazione pure con Unti [39], si deve la determinazione di una classe di metriche che ammettono raggi geodetici con rotazione e divergenza ($\rho \neq \bar{\rho} \neq 0$) e senza distorsione ($\sigma = 0$).

Gli Autori ottengono tre metriche (dette usualmente di NUT), una delle quali, di particolare interesse, è una generalizzazione della metrica di Schwarzschild.

La scelta delle tetradi e delle coordinate è differente da quella descritta in precedenza perché, per ipotesi, la congruenza di geodetiche nulle che individuano i raggi geodetici non è più ortogonale.

Il vettore λ_1^μ è tangente a tali geodetiche e la coordinata $x^1 = r$ è il parametro affine lungo di esse, cosicché: $\lambda_1^\mu = \delta_1^\mu$; ancora la tetrad, come la diade associata, si trasporta per parallelismo lungo la congruenza. Si ha pertanto:

$$(8.1) \quad \lambda_2^\mu = U \delta_1^\mu + X^a \delta_a^\mu \quad (\text{con } a = 0, 2, 3)$$

$$(8.2) \quad \lambda_3^\mu = \omega \delta_1^\mu + \zeta^a \delta_a^\mu \quad \text{e c.c.}$$

e, per i coefficienti di spin:

$$(8.3) \quad \kappa = \epsilon = \pi = 0$$

Accanto alle (7.1), si assumono le ulteriori ipotesi semplificatrici:

$$(8.6) \quad \psi_3 = \psi_4 = 0$$

e quindi, per il teorema di Goldberg e Sachs:

$$(8.6') \quad \nu = \lambda = 0$$

e inoltre:

$$(8.7) \quad \tau = 0$$

Si ricercano, cioè, soluzioni del tipo [2 2], con direzioni principali ξ_0^A e ξ_1^A .

Le equazioni si separano ancora in radiali e non radiali e gli operatori differenziali risultano così modificati:

$$(8.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} D \equiv \frac{\partial}{\partial r} \\ \Delta \equiv U \frac{\partial}{\partial r} + X^a \frac{\partial}{\partial x^a} \\ \delta \equiv \omega \frac{\partial}{\partial r} + \zeta^a \frac{\partial}{\partial x^a} \quad \text{e c.c.} \end{array} \right.$$

Come in precedenza, poi, si dispone di opportune trasformazioni di coordinate e di tetradi che rispettano le nuove condizioni.

L'integrazione conduce ad esprimere i coefficienti della metrica, i coefficienti di spin e la sola componente non nulla ψ_2 dello spinore gravitazionale in funzione delle coordinate x^1, x^2, x^3 , con l'intervento di due costanti arbitrarie, di cui una reale $\tilde{\psi}^0$ ed una immaginaria pura ρ_0 , oltreché di un parametro μ_0 che può assumere tre valori distinti: $-1/2; 0; +1/2$.

Le tre metriche corrispondenti, che non dipendono da x^0 , risultano un'estensione di altre ottenute da Taub [40] (valendosi di diverse coordinate ed operando in forma tensoriale); quella che si ottiene per $\mu_0 = +1/2$ è una generalizzazione della metrica di Schwarzschild e ad essa si riduce annullando la costante immaginaria ρ_0 .

Ciò è reso evidente mediante un cambiamento di coordinate che, riconducendo a quelle «sferiche» t, r, θ, Φ , fa assumere alla metrica la forma:

$$(8.9) \quad ds^2 = f(r) \left(dt + 4l \sin^2 \frac{\theta}{2} d\Phi \right)^2 + \\ - \frac{1}{f} dr^2 - (r^2 + l^2) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\Phi^2)$$

con:

$$(8.10) \quad f(r) = 1 - 2(mr + l^2)/(r^2 + l^2)$$

avendo posto: $\tilde{\psi}_0 = m$ e $|\rho_0| = 1$.

I quattro vettori di Killing, determinati accanto alla soluzione, generalizzano, nel caso in esame, quelli associati alla soluzione di Schwarzschild e ad essi si riducono per $\rho_0 = 0$.

Gli Autori esaminano il comportamento di una particella di prova in questo campo generalizzato di Schwarzschild e, fra l'altro, ne studiano l'orbita con un metodo di perturbazione, tipico della meccanica celeste: oltre ad una precessione

del perielio, che confrontano con il caso di Schwarzschild, trovano anche una rotazione dell'asse dei nodi, ossia una precessione del piano dell'orbita.

La metrica di NUT è stata studiata e discussa, sotto l'aspetto geometrico e topologico, da Misner [41], in un approfondito esame che ne rileva notevoli particolarità e conseguenti difficoltà di interpretazione.

9. Metriche di tipo [2 2].

La ricerca di soluzioni esatte (con raggi geodetici ortogonali e no) che ammettano direzioni principali nulle di curvatura coincidenti due a due è un problema completamente risolto da Kinnersley [42], [43]. Si hanno ben tredici metriche che comprendono anche quelle di Kerr e di NUT.

Poiché si cercano soluzioni del tipo [2 2], con direzioni principali ξ_0^A e ξ_1^A , si fanno le ipotesi:

$$(9.1) \quad \psi_0 = \psi_1 = \psi_3 = \psi_4 = 0$$

$$(9.2) \quad \kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$$

distinguendo, poi, i casi di $\rho \neq 0$ e $\rho = 0$.

La scelta del riferimento è tale che $\lambda_1^\mu = \delta_1^\mu$, con il solito significato per $x^1 = r$, cosicché valgono ancora le (8.1) e (8.2). Si impone, però, per i coefficienti di spin, accanto alle (9.2), la sola condizione:

$$(9.3) \quad \epsilon = 0$$

(equivalente a $D \xi_0^A = 0$).

Rispetto ai casi trattati in precedenza, le equazioni risultano così meno semplificate, almeno per $\rho \neq 0$.

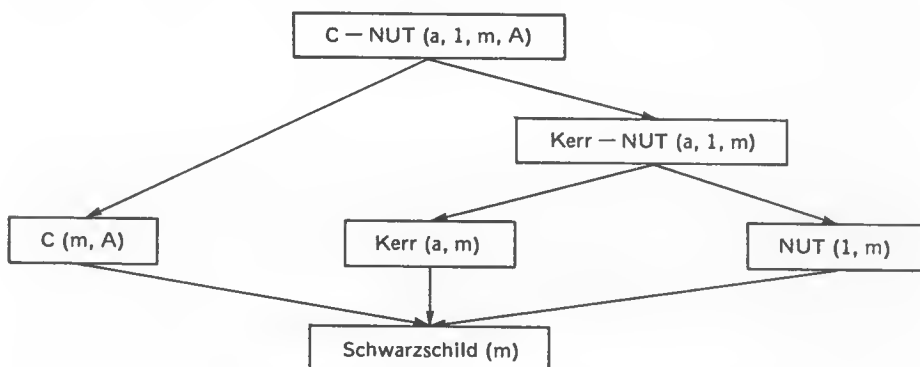
Il procedimento è sempre basato sulla separazione delle equazioni in radiali e trasverse.

Sfruttando l'arbitrarietà di trasformazioni di coordinate e tetradi che non alterino le condizioni imposte e disponendone in modi diversi — supponendo, volta a volta, uguali a zero alcune delle funzioni arbitrarie di integrazione — si ottengono le varie soluzioni.

Tutte le metriche risultano stazionarie e a simmetria assiale; avendo adattato le coordinate, i coefficienti della metrica vengono pertanto espressi mediante due sole coordinate: $x^1 = r$, $x^2 = x$, oltre ad un certo numero di costanti arbitrarie. Non mi soffermo sulla distinzione di tutti i casi e sottocasi considerati dal Kinnersley. Si hanno tre casi per $\rho \neq 0$ (con tre, sei e due sottocasi rispettivamente), oltre ad un caso IV per $\rho = 0$ (con due sottocasi).

La soluzione più generale, dipendente da quattro costanti: a , l , m , A , (11) viene indicata come C – NUT.

Il diagramma seguente illustra come da essa si possano ottenere altre metriche note:



Per accennare a qualche interpretazione fisica, ricordo che la metrica di Kerr-NUT è attribuita, da Demianski e Newman, al campo prodotto da una particella dotata di massa m , di momento di quantità di moto ma e di «monopolo magnetico di massa» l . Il parametro l viene, cioè, interpretato come l'analogo gravitazionale di un monopolo magnetico, ispirandosi all'elettrodinamica [45].

La metrica C, scoperta inizialmente da Levi-Civita [46], fu ritrovata da Newman e Tamburino [47], da Robinson e Trautman [38] e da Ehlers e Kundt [48] (ρ è reale e quindi si ricade in un caso di raggi geodetici con ipersuperfici nulle ortogonali). Kinnersley e Walker [44] ne propongono l'interpretazione come del campo di una massa puntiforme uniformemente accelerata.

Altre metriche che rientrano nello stesso caso della Kerr-NUT, ma appartengono a sottocasi diversi (e non figurano nel diagramma), vengono attribuite da Kinnersley a campi di particelle rotanti, distinguendo varie possibilità per i vettori spazio-temporali velocità e momento della quantità di moto delle particelle.

Quanto precede non vuole essere una rassegna di soluzioni esatte delle equazioni gravitazionali: pur limitandosi alle metriche algebricamente speciali, risulterebbe incompleta e non certo esauriente. Ho solo accennato ad alcune soluzioni, allo scopo di illustrare le possibilità e gli aspetti caratteristici del metodo spinoriale.

(11) Nella determinazione originaria, dipende da cinque costanti arbitrarie; successivamente lo stesso Autore rileva che non tutti i parametri sono significativi [44], [43].

Ho considerato il caso delle equazioni gravitazionali negli spazi vuoti, ma quanto visto è solo indicativo. Il discorso si potrebbe estendere alle equazioni di Maxwell-Einstein, nella forma di Newman e Penrose, e molti sono i risultati raggiunti anche in tale ambito.

Voglio infine aggiungere che anche studi recenti dedicati alle applicazioni relativistiche nell'astrofisica, si collegano alle questioni trattate. E' generalmente accettato che il collasso gravitazionale di una stella dia luogo ad un buco nero, all'esterno del quale la geometria dello spazio-tempo è caratterizzata dalla metrica di Schwarzschild (in assenza di rotazione) o di Kerr (per una stella rotante).

E' di grande interesse, pertanto, lo studio delle perturbazioni sia elettromagnetiche, sia gravitazionali di tali metriche, per approfondire fenomeni legati tanto alle proprietà stesse del campo originato dalla stella che subisce il collasso, quanto alle informazioni che potrebbero essere captate da un osservatore lontano.

A titolo indicativo, cito qualche lavoro, connesso a tali questioni [49], [50], [51], da cui risulta che questo tipo di ricerche si vale ampiamente del formalismo spinoriale, quale strumento particolarmente adatto per la trattazione di questi affascinanti e non certo semplici problemi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] INFELD L. and VAN DER WAERDEN B. L., *Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitz. Ber. der Preuss Akad., 9, 380 (1933).
- [2] BADE W. L. and JEHLE H., *An Introduction to Spinors*, Revs. Modern Phys., 25, 714 (1953).
- [3] RUSE H. S., *On the Geometry of Dirac's Equations and their Expression in Tensor Form*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 57, 97 (1937).
- [4] LICHNEROWICZ A., *Les spineurs en relativité générale*, Confer. Sem. Matem. Univ. Bari, 79 (1962).
- [5] WITTEN L., *Invariants of General Relativity and the Classification of Spaces*, Phys. Rev., 113, 357 (1959).
- [6] PENROSE R., *Structure of Space-Time*, in «Battelle rencontres», Benjamin inc., New York, Amsterdam, 121 (1968).
- [7] CORSON E. M., *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave-Equations*, Blackie & Son Ltd., London and Glasgow (1955).
- [8] NEWMAN E. and PENROSE R., *An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients*, Journ. of Math. Physics, 3, 566 (1962).
- [9] UDESCHINI BRINIS E., *Applicazioni del calcolo spinoriale nel problema della radiazione*, Rend. Sem. Matem. e Fis. Milano, XLIII (1973).
- [10] BERGMANN P. G., *Two-Component Spinors in General Relativity*, Phys. Rev., 107, 2 (1956).
- [11] UDESCHINI BRINIS E., *Deduzione variazionale delle equazioni gravitazionali spinoriali*, Ann. di Matem., 81, 45 (1969).
- [12] PENROSE R., *A Spinor Approach to General Relativity*, Annals of Physics, 10, 171 (1960).

- [13] UDESCHINI BRINIS E., *Equazioni spinoriali ed intrinseche della gravitazione*, Rend. Ist. Lombardo, A, 108, 322 (1974).
- [14] BEL L., *Sur la radiation gravitationnelle*, Comptes rendus, 247, 1094 (1958).
- [15] UDESCHINI BRINIS E., *Tensore e spinore energetico di campi bivettoriali e spinoriali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Nota I, 50 (4), 456 (1971); Nota II, 50 (5), 555 (1971).
- [16] UDESCHINI BRINIS E., *Sullo spinore energetico in uno spazio-tempo riemanniano*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 53, 104 (1972).
- [17] UDESCHINI BRINIS E., *Equazioni di campi spinoriali dedotte da un'unica lagrangiana*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Nota I, 40 (4), 577 (1966); Nota II, 40 (5), 828 (1966).
- [18] UDESCHINI BRINIS E., *Principio variazionale spinoriale nei campi gravitazionali einsteiniani*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 46, 249 (1969).
- [19] UDESCHINI BRINIS E., *Sulle equazioni gravitazionali spinoriali e sull'uso delle diadi*, II Congr. Naz. AIMETA, I, 15, 153, (1974).
- [20] UDESCHINI BRINIS E., *Su un tensore triplo «potenziale» del tensore di Riemann*, Rend. Ist. Lombardo, Parte I, A, 111, 466 (1977); Parte II, in corso di stampa.
- [21] CARMELI M., *Gauge fields and gravitational field equations*, Nucl. Phys. (B) 38, 621 (1972).
- [22] CARMELI M., *Group Theory and General Relativity*, McGraw-Hill Inc. London (1977).
- [23] PAPAPETROU A., *Les équations supplémentaires dans le formalisme de Newman-Penrose*, Ann. Inst. Henri Poincaré, A, 13, 4, 271 (1970).
- [24] PAPAPETROU A., *Quelques remarques sur le formalisme de Newman-Penrose*, Comptes rendus, 272, 1537 (1971).
- [25] SYNGE J. L., *Relativity: The Special Theory*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1955).
- [26] DEBEVER R., *Sur le tenseur de super-énergie*, Comptes rendus, 249, 1324 (1959); *Tenseur de super-énergie, tenseur de Riemann: cas singuliers*, Comptes rendus, 249, 1744 (1959).
- [27] GÉHÉNIAU M. J., *Une classification des espaces einsteiniens*, Comptes rendus, 244, 723 (1957).
- [28] PETROV A. Z., *Classification of spaces defined by gravitational fields*, Uch. zap. Kazan Gos. Univ., 114, 8, 55 (1954).
- [29] PIRANI F. A. E., *Invariant Formulation of Gravitational Radiation Theory*, Phys. Rev. 105, 1089 (1957).
- [30] BONDI H., PIRANI F. A. E. & ROBINSON I., *Gravitational waves in general relativity*, III, Proc. Roy. Soc. A, 251, 519 (1959).
- [31] TRAUTMAN A., *Lectures on general relativity* (mimeographed notes), King's College London (1958).
- [32] SACHS R. K., *Gravitational waves in general relativity*, VI, Proc. Roy. Soc. A, 264, 309 (1961).
- [33] PIRANI F. A. E., *Gravitational Radiation*, in «Gravitation: An introduction to current research», Witten L. Editor, John Wiley & Sons, New-York (1962).
- [34] SACHS R. K., *Gravitational waves in general relativity*, VIII, Proc. Roy. Soc. A, 270, 103 (1962).
- [35] SACHS R. K., *Gravitational radiation*, in «Relativity, Groups and Topology», DeWitt and de Witt Editors, Gordon and Breach, New-York (1964).
- [36] ROBINSON I., and TRAUTMAN A., *Spherical Gravitational waves*, Phys. Rev. Lett., 4, 8, 431 (1960).
- [37] NEWMAN E. T. and TAMBURINO L. A., *Empty Space Metrics Containing Hypersurface Orthogonal Geodesic Rays*, J. Math. Phys. 3, 5, 902 (1962).
- [38] ROBINSON I. and TRAUTMAN A., *Some spherical gravitational waves in general relativity*,

- Proc. Roy. Soc. A, 265, 463 (1962).
- [39] NEWMAN E., TAMBURINO L., and UNTI T., *Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric*, J. Math. Phys., 4, 7, 915 (1963).
 - [40] TAUB A. H., *Empty space-times admitting a three parameter group of motions*, Annals of Mathem., 53, 3, 472 (1951).
 - [41] MISNER C. W., *The Flatter Regions of Newman, Unti, and Tamburino's Generalized Schwarzschild Space*, J. Math. Phys., 4, 7, 924 (1962).
 - [42] KINNERSLEY W., *Type D Vacuum Metrics*, J. Math. Phys., 10, 7, 1195 (1969).
 - [43] KINNERSLEY W., *Recent Progress in Exact Solutions*, Proceedings of Tel Aviv Conference, (1974).
 - [44] KINNERSLEY W. and WALKER M., *Uniformly Accelerating Charged Mass in General Relativity*, Phys. Rev. D, 2, 8, 1359 (1970).
 - [45] DEMIANSKI M. and NEWMAN E. T., *A Combined Kerr-NUT Solution of the Einstein Field Equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., 14, 11, 653 (1966).
 - [46] LEVI-CIVITA T., *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. VII: Il sottocaso B_2 Soluzioni oblique*, Atti Acc. Lincei, 27, 343 (1918).
 - [47] NEWMAN E. T. and TAMBURINO L. A., *New approach to Einstein's empty space field equations*, J. Math. Phys. 2, 667 (1961).
 - [48] EHLERS J. and KUNDT W., *Exact Solutions of the Gravitational Field Equations*, in «Gravitation: An Introduction to current research», Witten L. Editor, John Wiley & Sons, New York (1962).
 - [49] PRICE R. H., *Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. II. Integer-Spin, Zero-Rest-Mass Fields*, Phys. Rev. D, 5, 10, 2439 (1972).
 - [50] FACKERELL E. D. and IPSER J. R., *Weak Electromagnetic Fields Around a Rotating Black Hole*, Phys. Rev. D, 5, 10, 2455 (1972).
 - [51] TEUKOLSKY S. A., *Rotating Black Holes: Separable Wave Equations for Gravitational and Electromagnetic Perturbations*, Phys. Rev. Lett., 29, 16, 1114 (1972).



C. CATTANEO †

CONSIDERAZIONI MACHIANE CLASSICHE E RELATIVISTICHE.

Come è noto per testimonianza esplicita dello stesso Einstein, la relatività generale ha avuto uno dei suoi più potenti motivi ispiratori nelle idee di Ernesto Mach sullo spazio. Conformemente ad una visione positivistica secondo la quale in una teoria fisica non hanno diritto di cittadinanza se non enti fisicamente e direttamente osservabili, Mach giudicava inaccettabile il subordinare le leggi della fisica ad un ente, quale lo spazio assoluto newtoniano, privo di ogni carattere fisico direttamente riconoscibile o dai nostri sensi o da strumenti di laboratorio. Nelle sue celebri lezioni sulla meccanica [1] Mach riprendeva l'esperimento newtoniano del secchio d'acqua sospeso ad una fune e mantenuto in rotazione uniforme attorno a un asse verticale. L'osservazione mostra che la superficie dell'acqua non resta piana ma assume una forma concava, tanto più concava quanto maggiore è la velocità di rotazione del secchio. Qual'è la ragione fisica che determina questo incurvamento? Il meccanico newtoniano risponde: la causa dell'incurvamento è il movimento rotatorio del secchio rispetto allo spazio assoluto, al quale le leggi della dinamica sono subordinate. Mach replica: codesta spiegazione non ha senso; come può una entità che non ha una osservabilità diretta, che è puro vuoto, come lo spazio assoluto, avere influenza su un oggetto fisico? Ciò che noi vediamo, piuttosto, è che il secchio ruota rispetto alle stelle; come non attribuire a queste enormi masse e al loro movimento di insieme rispetto al secchio la ragione fisica dell'incurvamento dell'acqua?

Secondo Mach non è dunque un caso se lo spazio assoluto di Newton si trova a coincidere con lo spazio delle «stelle fisse»; sono queste infatti, e non lo spazio, a influenzare i fenomeni fisici. Secondo tale concezione i riferimenti privilegiati di cui noi obietti-

Mach: i riferimenti privilegiati di cui constatiamo l'esistenza sono da collegare alle grandi masse che popolano l'universo.

mente constatiamo l'esistenza — gli ordinari riferimenti galileiani — non devono spiegarsi mediante una loro relazione particolarmente semplice con lo spazio assoluto, bensì per la loro relazione particolarmente semplice con le masse, immensamente grandi e immensamente lontane, del nostro universo.

I riferimenti galileiani desunti dal riferimento di minima energia cinetica dell'universo.

Come inizio di questa mia esposizione vorrei mostrare come l'idea machiana si possa già inserire, in maniera semplicissima, nella costruzione newtoniana. Immaginiamo che tra le masse del nostro universo, comunque numerose e comunque grandi ma la cui somma supponiamo finita, agiscano soltanto forze interne, per esempio di tipo newtoniano, di potenziale complessivo U , dipendente dalle masse medesime e dalle mutue distanze r_{ij} . Notoriamente le leggi del moto di un tale universo si possono esprimere nella forma variazionale seguente (principio dell'azione stazionaria)

$$(1) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} T \, dt = 0 \quad \begin{array}{l} \text{subordinatamente} \\ \text{alla condizione} \end{array} \quad T - U = \text{cost},$$

T essendo l'energia cinetica dell'intero universo rispetto allo spazio assoluto. Per evitare il ricorso allo spazio assoluto modifichiamo leggermente il precedente enunciato sostituendo alla forza viva assoluta T la *forza viva intrinseca* T^* dell'universo

$$(2) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} T^* \, dt = 0 \quad \begin{array}{l} \text{subordinatamente} \\ \text{alla condizione} \end{array} \quad T^* - U = \text{cost}$$

e cioè la sua energia cinetica rispetto ad una terna $\mathcal{C}^*$ avente l'origine nel baricentro O dell'universo e orientamento tale che, a ciascun istante, si annulli rispetto ad essa il momento angolare totale del sistema. (Come è noto, $\mathcal{C}^*$ è terna di minima energia cinetica del sistema). Con questa formulazione globale ed intrinseca delle leggi di evoluzione dell'universo il ricorso allo spazio assoluto è senz'altro eliminato. Ma possiamo anche mostrare che la modificazione introdotta non contraddice la nostra esperienza di abitanti del sistema solare. Facciamo a tale scopo l'ipotesi, che per molto tempo è stata considerata conforme alla realtà e da accogliersi comunque come un'approssimata constatazione di fatto, che le grandi masse dell'universo (M^*) costituiscano

sensibilmente un tutto rigido. E' chiaro allora che il riferimento $\mathcal{C}^*$ di minima energia cinetica risulterà solidale a queste masse e non sarà sensibilmente turbato dalla presenza di piccole masse mobili quali, per esempio, quelle che costituiscono il nostro sistema solare (S).

Fissiamo ora l'attenzione sul nostro sistema solare (S) ed ammettiamo, conformemente all'abitudine, che siano completamente trascurabili, o per la lontananza o per effetto di compensazioni, le forze che i corpi di (S) risentono dalle masse ($\mathcal{M}^*$). In queste condizioni, tenuto anche conto che la energia cinetica delle masse ($\mathcal{M}^*$) rispetto a $\mathcal{C}^*$ è costantemente nulla, dalla legge globale (2) discende la legge di moto del sistema (S) rispetto alla terna universale $\mathcal{C}^*$ nella forma

$$(3) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \tau \, dt = 0 \quad \begin{array}{l} \text{subordinatamente} \\ \text{alla condizione} \end{array} \quad \tau - u = \text{cost},$$

dove τ è l'energia cinetica, rispetto al riferimento universale $\mathcal{C}^*$, del solo sistema (S) ed u è il potenziale interno di (S). Ma notoriamente la legge (3) equivale alle ordinarie leggi newtoniane rispetto al riferimento $\mathcal{C}^*$, che vengono pertanto ripristinate per il nostro sistema solare. Tuttavia il riferimento privilegiato $\mathcal{C}^*$ non è legato ad alcuno spazio assoluto, bensì è legato nel modo più semplice alle grandi masse dell'universo.

Il ragionamento precedente resta valido, con individuazione immediata del riferimento di minima energia cinetica, anche in ipotesi meno restrittive e più realistiche di quelle sopra ammesse, quali ad esempio si ammettono in modelli di tipo espansivo. Per inciso dirò che questo tipo di modello cosmologico, strettamente newtoniano, si presta a mettere in evidenza, per lo meno sotto l'aspetto qualitativo, alcuni aspetti essenziali del nostro universo reale non meno di più elaborati modelli relativistici. Penso che di essi ci parlerà, nella sua conferenza di mercoledì, il Prof. Galletto.

Esempi di collegamento indiretto tra riferimenti galileiani e materia che popola l'universo sono offerti anche dalla relatività generale. E' ben noto per esempio che in un universo nel quale fosse presente soltanto un guscio sferico omogeneo, la regione spaziotemporale che corrisponde all'interno del guscio sarebbe

Riferimenti
galileiani in
relatività generale.

rigorosamente piatta e quindi dotata di riferimenti galileiani, uno di questi in quiete rispetto al guscio.

Ma si danno anche esempi meno particolari e in più realistici. Sia per esempio V^4 un qualunque universo spaziotemporale statico, cioè un universo munito di un gruppo di isometrie a un parametro, con traiettorie del genere tempo costituenti una congruenza normale. Se in un tale universo si adottano coordinate locali (x^i) (1) adattate alla staticità, queste realizzano l'indipendenza dal tempo di tutte le componenti del tensore metrico ($\partial_4 g_{ik} = 0$) nonché l'annullamento delle componenti $g_{\rho 4}$ ($g_{\rho 4} = 0$, $\rho = 1, 2, 3$). In tali coordinate, mentre le componenti $g_{\alpha\beta}$ esprimono la geometria metrica, invariabile nel tempo, dello spazio fisico tridimensionale, generalmente non piatto ma curvo, la componente g_{44} o più precisamente la funzione spaziale $U \equiv -c^2 \log \sqrt{-g_{44}}$ assume la parte che in fisica classica è svolta dall'ordinario potenziale gravitazionale

$$(4) \quad dl^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad U(x^1, x^2, x^3) \equiv -c^2 \log \sqrt{-g_{44}}$$

metrica dello spazio
fisico tridimensionale

potenziale gravitazionale

Non è difficile riconoscere, in base alle equazioni gravitazionali di Einstein, che in una regione di V^4 non occupata da materia la U è una funzione armonica in senso spaziotemporale ($g^{ik} \nabla_i \nabla_k U = 0$), godendo in conseguenza di molte proprietà analoghe a quelle dell'ordinario potenziale newtoniano. In particolare si riconosce che se il potenziale U è costante su una superficie bidimensionale chiusa σ dello spazio fisico W^3 , esso è costante in tutta la regione tridimensionale w , supposta a connessione semplice, racchiusa da σ . Un esame ulteriore, ancora basato sulle equazioni gravitazionali, mostra che all'interno di σ e di tutta l'ipersuperficie Σ che da σ ha origine mediante le traiettorie del gruppo di staticità, è ovunque nullo il tensore di curvatura ($R_{iklm} = 0$). Ciò significa che, limitatamente a questa regione, la varietà spaziotemporale ha struttura minkowskiana e quindi ammette riferimenti galileiani. Dal filo del ragionamento si arguisce che, ancora una volta, questi riferimenti sono strettamente collegati alla materia che riempie

(1) Indici latini $i, k, \dots$ variabili da 1 a 4 (x^4 , coordinata temporale); indici greci $\alpha, \beta, \dots$ variabili da 1 a 3 (x^α , coordinate spaziali).

l'universo. Ciò che differenzia questi riferimenti galileiani dai riferimenti galileiani della fisica classica o della relatività ristretta, è il fatto che essi non sono estesi a tutto lo spazio fisico ma hanno un'estensione limitata. Il risultato ora enunciato, oltre a presentare un notevole interesse teorico, è abbastanza generale per trovare applicazione approssimata al nostro universo reale. Infatti, anche ammesso che macroscopicamente questo nostro universo sia ben rappresentato da un modello espansivo completamente riempito di materia — per esempio un modello di Friedmann — è da ritenere tutt'altro che inverosimile che in regioni ristrette, intergalattiche o anche interstellari, sensibilmente vuote di materia le ipotesi che stanno alla base del teorema sopra enunciato si trovino, almeno approssimativamente, realizzate (l'ipotesi di stazionarietà non essendo troppo lontana dalla realtà). Se così fosse, il teorema da un lato giustificerebbe l'esistenza dei riferimenti galileiani che noi obbiettivamente sperimentiamo nel ristretto ambito del nostro sistema solare, dall'altro renderebbe verosimile il verificarsi di analoghe situazioni locali in uno sterminato numero di altre regioni del nostro universo. Naturalmente non è escluso che due riferimenti galileiani locali, relativi a regioni molto lontane, siano animati da moto reciproco più o meno accelerato.

Gli esempi classici e relativistici svolti finora caratterizzano i riferimenti galileiani, quando esistono, come riferimenti che si adeguano il più possibile al moto della materia, tanto da solidizzarsi con essa in alcuni casi, o a discostarsene il meno possibile in altri. Fu forse un'osservazione di questo tipo che suggerì a H. Thirring il problema seguente.

Poniamoci nello spaziotempo di Minkowski, completamente vuoto di materia, e in esso consideriamo un riferimento galileiano. Supponiamo ora che in questo riferimento galileiano venga portato un guscio materiale sferico omogeneo ed ivi lasciato in quiete. Da quanto si è detto sopra risulta che la presenza del guscio disturba la minkowskianità al suo esterno ma non all'interno. Sicché un riferimento galileiano in quiete rispetto al guscio continua a sussistere al suo interno. A questo punto Thirring si domanda: che cosa accadrebbe di questo riferimento galileiano interno se il guscio anziché rimanere in quiete rispetto a un osservatore esterno infinitamente lontano, rotasse uniformemente rispetto a questo osservatore? Un calcolo di prima approssimazione sulla base delle

In relatività generale eventuali riferimenti galileiani possono avere estensione limitata.

Nel nostro universo esistono altre isole galileiane?

H. Thirring:
trascinamento parziale di riferimenti galileiani da parte della materia.

equazioni gravitazionali, valido per velocità di rotazione non troppo elevate e significativo soprattutto in vicinanza del piano equatoriale, ha condotto Thirring alla seguente risposta: la rotazione del guscio non distrugge, almeno in prima approssimazione, il riferimento galileiano all'interno del guscio ma ha per effetto di farlo rotare attorno al suo stesso asse e nel suo stesso verso, con una velocità angolare concorde e proporzionale a quella del guscio ma più piccola:

$$w' \cong \frac{4}{3} \frac{GM}{Rc^2} w$$

(G , costante newtoniana di gravitazione; m , R , w , massa, raggio, velocità angolare del guscio).

Il risultato di Thirring ha costituito una tappa importante per i problemi machiani. Non mi trattengo su di esso e su altri lavori cui esso ha dato origine perché il punto di vista di Thirring verrà implicitamente approfondito nel problema che tratteremo tra un momento e che costituirà la parte saliente della mia esposizione.

W. Rindler:
previsione di un
effetto machiano
elettromagnetico.

Fino a questo punto ci siamo limitati a considerare, del principio di Mach, soltanto alcuni aspetti di natura puramente meccanica. Ma chi crede nell'unità della fisica è propenso a prevedere anche effetti machiani di natura più ampia. Fin dalla prima edizione del suo libro «Essential Relativity», edita nel 1969, W. Rindler si pone il problema seguente. Si consideri un guscio sferico $\bar{\Sigma}$ di densità materiale costante ed elettricamente carico, con la carica (per esempio positiva) distribuita uniformemente. Il guscio viene supposto non conduttore e quindi le cariche solidali alla materia. Se la sfera $\bar{\Sigma}$ è in quiete rispetto a un osservatore galileiano esterno, questi avvertirà la presenza di un campo gravitazionale centrale e di un campo elettrostatico pure centrale; un osservatore, esso pure in quiete, posto all'interno del guscio, non avvertirebbe né l'uno né l'altro. Se invece la sfera fosse animata, rispetto ai predetti due osservatori, da moto rotatorio uniforme attorno a un suo diametro, l'osservatore esterno continuerebbe a sperimentare un campo gravitazionale e un campo elettrostatico, sia pure non più rigorosamente centrali (si ricordi che ci poniamo in relatività generale) oltre ad un campo magnetico dipolare; quanto all'osservatore interno, trovandosi circondato da un insieme di correnti circolari, coassiali e concordi, risentirà,

come effetto dominante della rotazione del guscio, la presenza di un campo magnetico diretto come l'asse di rotazione. Si tratta fin qui di previsioni elementari ed evidenti.

Ma torniamo all'ipotesi che il guscio carico sia fermo e supponiamo che esso sia circondato da un secondo guscio più grande, concentrico, anche esso materialmente omogeneo ma elettricamente neutro. Se questo secondo guscio viene mantenuto fermo, come il primo, le cose almeno qualitativamente, non sono cambiate: un osservatore esterno ai due gusci continuerà a sperimentare un campo elettrostatico e un campo gravitazionale centrali, il secondo più intenso per la presenza del guscio esterno. L'osservatore interno al guscio carico continuerà a non avvertire nulla.

Ma che cosa accadrà, si domanda Rindler, se, mantenendo fermo il guscio carico, il guscio neutro viene fatto rotare di moto uniforme attorno a un suo diametro? Rindler risponde con la congettura seguente: la rotazione del guscio esterno non eliminerà il riferimento privilegiato (galileiano) interno al guscio carico ma determinerà, con un effetto del tipo Thirring, un suo parziale trascinamento, con velocità angolare concorde a quella del guscio esterno. Rispetto a questo riferimento privilegiato interno il guscio carico apparirà rotare in senso opposto, determinando un insieme di correnti circolari e quindi l'insorgere di un campo magnetico parallelo all'asse di rotazione all'interno del guscio carico e di un campo magnetico dipolare all'esterno.

Lo stesso Rindler in collaborazione con J. Ehlers, hanno cercato di sottoporre al controllo del calcolo la congettura machiana testè formulata. La teoria di Ehlers-Rindler, necessariamente sviluppata con procedimento approssimato per le gravi difficoltà analitiche inerenti al problema, ha confermato soltanto in parte la congettura di Rindler. La teoria ha messo in evidenza i campi magnetici congegnati all'interno e fuori del guscio carico ma, come dicono gli AA. stessi, non sempre nel riferimento previsto. Inoltre la teoria rivelava altri effetti concomitanti, gravitazionali ed elettromagnetici, dello stesso ordine di grandezza che rendevano molto incerta l'interpretazione machiana dei risultati.

Un'attenta riflessione sul problema in questione e la sensazione che, malgrado tutto, la congettura di Rindler avesse un serio fondamento fisico conducevano a presumere che le incertezze emerse dalla teoria di Ehlers-Rindler potessero derivare da una inadatta scelta della simmetria posta alla base della teoria stessa

— simmetria assiale — poco discosta da una simmetria sferica — e che alla genuina natura del problema meglio si addicesse un'ipotesi di simmetria decisamente cilindrica. Su questa nuova base il problema è stato ripreso e compiutamente trattato da M. Carfora, il quale ne ha fatto oggetto della sua tesi di laurea in fisica (gennaio 1977). Alcuni dei suoi risultati sono stati riassunti in due note lincee [10].

Cercherò ora di illustrare nelle sue parti essenziali la trattazione fatta da Carfora, mettendone in evidenza i principali elementi tecnici e gli aspetti fisici più significativi. Come vedremo, del problema viene data una soluzione completa e matematicamente rigorosa senza ricorso a procedimenti di approssimazione.

Il problema di
E-R in simmetria
cilindrica.

In ipotesi di simmetria cilindrica il problema di Ehlers-Rindler si formula al modo seguente. Nello spazio fisico sono presenti due oggetti materiali: un guscio cilindrico indefinito Σ , omogeneo e omogeneamente carico; un secondo guscio cilindrico indefinito $\bar{\Sigma}$, coassiale ed esterno al precedente, pure omogeneo ma elettricamente neutro, rotante con velocità angolare costante. Le dimensioni dei due cilindri, le rispettive densità proprie superficiali di massa, la densità propria superficiale di carica del cilindro interno e la velocità angolare del cilindro esterno si intendono assegnati. Una particolarità strutturale del cilindro esterno verrà precisata più avanti.

La presenza di cariche implica la presenza di un campo elettromagnetico verosimilmente esteso all'intero spazio. La presenza della materia, tutta addensata nei gusci, e del campo elettromagnetico, ovunque diffuso, implicano l'esistenza di un campo gravitazionale.

I due gusci dividono lo spazio fisico, e quindi anche lo spaziotempo, in tre regioni: una regione interna A_1 , una intermedia A_2 , una esterna A_3 ; chiameremo $\bar{\Sigma}$ e Σ , cioè con lo stesso nome dei gusci, le ipersuperficie spaziotemporali che separano una regione dall'altra e sulle quali si sviluppa la storia dei due gusci. In ciascuna delle tre regioni, dalle quali le ipersuperficie di frontiera si intendono escluse, devono essere soddisfatte sia le equazioni di Maxwell

$$(5) \quad F_{ik,l} + F_{kl,i} + F_{li,k} = 0$$

$$(6) \quad F^{ik}{}_{;k} = 0$$

sia le equazioni gravitazionali di Einstein

$$(7) \quad R_k^i - \frac{1}{2} R \delta_k^i = -\kappa S_k^i$$

$$(8) \quad S_k^i \equiv F_{kl} F^{il} - \frac{1}{4} \delta_k^i F_{lm} F^{lm}$$

Il secondo membro delle equazioni (6) si è assunto uguale a zero perché non esistono sorgenti elettromagnetiche diffuse. Nelle equazioni (7) è invece presente, come unica sorgente gravitazionale diffusa, il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico, la cui espressione è richiamata in (8). Funzioni incognite nelle equazioni sopradette sono le sei componenti F_{ik} del tensore campo elettromagnetico e le dieci componenti g_{ik} del tensore metrico. Campo gravitazionale e campo elettromagnetico sono vincolati, in ciascuna delle tre regioni A_α , al rispetto delle equazioni differenziali sopracritte. Ma non basta: le tre soluzioni

Condizioni di
frontiera: CF

debbono altresì raccordarsi tra loro, sulle due ipersuperficie di frontiera $\bar{\Sigma}$ e Σ , obbedendo alle condizioni di frontiera, elettromagnetiche e gravitazionali.

Le condizioni di frontiera elettromagnetiche, da imporre sui due gusci, non sono che l'adattamento relativistico delle condizioni che sussistono in fisica classica nell'attraversamento di uno strato semplice di cariche o di correnti.

Esse impongono determinate discontinuità al tensore campo elettromagnetico, espresse dalle uguaglianze seguenti (2)

$$(9) \quad [F^{ki}]_{r_0} \bar{n}_i = \bar{J}^k(r_0) [\eta^{klm} F_{lm}]_{r_0} \bar{n}_i = 0 \quad \dots \bar{\Sigma}$$

$$(10) \quad [F^{ki}]_{R_0} n_i = J^k(R_0) [\eta^{klm} F_{lm}]_{R_0} n_i = 0 \quad \dots \Sigma$$

CF elettromagnetiche

(n_i vettore unitario normale a Σ , R_0 coordinata radiale dei punti di Σ , η^{klm} tensore antisimmetrico dispari di Ricci, J^k 4-densità superficiale di corrente su Σ . Le lettere sopralineate indicano analoghe quantità su $\bar{\Sigma}$).

Il simbolo $[]$ rappresenta il «salto» subito da una grandezza

(2) In termini più correnti le (9) (10) esprimono: (a) nell'attraversamento di uno strato di sole cariche, continuità del campo magnetico e delle componenti tangenziali del campo elettrico, discontinuità della componente normale del campo elettrico (b) nell'attraversamento di uno strato di sole correnti, continuità del campo elettrico e della componente normale del campo magnetico; discontinuità delle componenti tangenziali del campo magnetico.

nell'attraversamento dello strato, nel senso di n_p o $\bar{n}_p$ rispettivamente. Si noti che, pur avendo supposto che nel riferimento S_3 il cilindro esterno appaia privo di cariche, nelle (10), si è comunque lasciata disponibile una 4-densità di corrente J^k (R_0). La cosa verrà giustificata più avanti.

Quanto alle condizioni di frontiera gravitazionali, nell'attraversamento di uno strato, per esempio $\bar{\Sigma}$, esse impongono: (a) continuità del tensore metrico g_{ik} (b) discontinuità per le derivate prime $g_{ik,l}$ soddisfacenti alle uguaglianze seguenti

$$(11) \quad \frac{1}{2} \{ g^{lm} [g_{ik,l}] \bar{n}_m - ([g_{im,k}] + [g_{mk,i}]) \bar{n}^m + \\ + g^{lm} [g_{lm,i}] \bar{n}_k \} = -\kappa \left(\bar{C}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \bar{C}_i^i \right) \dots \bar{\Sigma}$$

dove $\bar{C}_{ik}$ rappresenta il tensore energia-impulso superficiale inerente al guscio $\bar{\Sigma}$. Naturalmente condizioni analoghe sussistono per il guscio esterno:

$$(12) \quad \frac{1}{2} \{ g^{\hat{l}\hat{m}} [g_{ik,\hat{l}}] n_{\hat{m}} - ([g_{i\hat{m},k}] + [g_{\hat{m}k,i}]) n^{\hat{m}} + \\ + g^{\hat{l}\hat{m}} [g_{\hat{l}\hat{m},i}] n_{\hat{k}} \} = -\kappa \left(C_{i\hat{k}} - \frac{1}{2} g_{i\hat{k}} C_{\hat{l}}^{\hat{l}} \right) \dots \Sigma$$

Le condizioni di frontiera (9) (10) e (11) (12) non costituiscono soltanto imposizioni atte a realizzare la transizione da una regione all'altra con la massima regolarità possibile ma sono anche vere relazioni fisiche causali tra sorgenti da un lato, elettromagnetiche o gravitazionali, aventi i gusci come supporto, e concomitanti variazioni dei campi dall'altro; a causa dell'addensamento delle sorgenti, tali variazioni non sono differenziali ma brusche. Sotto questo riguardo le (9) (10) (11) (12) devono considerarsi come sostitutive delle equazioni di campo (5) (6) (7) sulle ipersuperficie «singolari» $\bar{\Sigma}$ e Σ .

Vale la pena di ricordare che le condizioni di frontiera relative a uno strato bidimensionale Σ dello spazio fisico (tridimensionale nello spaziotempo) su cui sono diffuse materia, cariche, correnti, si possono ottenere a partire dalle ordinarie equazioni di Maxwell e di Einstein, complete di sorgenti tridimensionali (quadridimen-

sionali in V^4), con l'uno o con l'altro dei due procedimenti seguenti: 1) ammettere che la validità delle equazioni di campo (5) (6) e (7) possa essere estesa anche a situazioni di campi e sorgenti non ovunque regolari, trascrivendo le equazioni stesse in senso distribuzionale: $\partial_i \rightarrow \overset{*}{\partial}_i$, ∂_i derivazione ordinaria, $\overset{*}{\partial}_i$ derivazione distribuzionale. 2) Integrare le equazioni di campo (5) (6) e (7) su uno strato quadrimensionale di spessore finito includente al suo interno la ipersuperficie Σ e facendo poi tendere a zero questo spessore mentre simultaneamente si fanno tendere ad infinito, in modo opportuno, le densità cubiche di massa, di carica, di corrente. Con l'uno o con l'altro di tali procedimenti, formalmente dissimili, ma aventi un comune contenuto fisico, si perviene da un lato ai primi membri delle (9) (10) - (11) (12) e dall'altro ai secondi membri delle medesime dove compaiono densità di massa, di carica, di corrente, e tensori di energia-impulso non più riferiti all'unità di volume, bensì all'unità superficiale dello strato.

Chiarite ormai quali siano le condizioni da soddisfare, veniamo al nostro problema specifico.

La situazione complessiva giustifica senza possibilità di dubbio, in ciascuna delle tre regioni A_α , l'ipotesi di completa simmetria cilindrica e di stazionarietà temporale. Però noi, salvo controllo a posteriori, ammetteremo qualcosa di più: che ciascuna delle tre regioni A_α ammetta un riferimento coordinato locale $S_\alpha \equiv (r, \varphi, z, ct)$ nel quale la metrica spaziotemporale oltre che cilindrica sia addirittura statica, cioè insieme stazionaria e tempo-ortogonale. In ciascuna delle tre regioni A_α potremo pertanto scrivere la metrica spazio-temporale nella forma stabilita da Levi-Civita [6]

$$(13) \quad ds^2 \equiv e^{2(k-u)}(dr^2 + dz^2) + R^2 e^{-2u} d\varphi^2 - c^2 e^{2u} dt^2$$

$k(r)$, $u(r)$, $R(r)$ essendo funzioni indeterminate della sola variabile r . Naturalmente le coordinate privilegiate r, φ, z, ct non sono le stesse nelle tre regioni A_α ; precisamente noi indicheremo con $S_1 \equiv (r', \varphi', z', ct')$ le coordinate cilindrico-statiche in A_1 , con $S_2 \equiv (r, \varphi, z, ct)$ le analoghe coordinate in A_2 , con $S_3 \equiv (\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}, \hat{ct})$ le analoghe in A_3 . E' da prevedere che i tre riferimenti S_α non saranno in quiete reciproca ma saranno invece in moto rotatorio uniforme l'uno rispetto agli altri, con velocità che a priori non è dato di conoscere.

Simmetria
cilindrica e
stazionarietà in
tutta V^4 .

Simmetria
cilindrica e statica
in ciascuna delle
 V_α : coordinate
cilindrico-statiche

Si noti infatti che se in ciascuna regione A_α si effettua una trasformazione di coordinate del tipo

$$(14) \quad \begin{aligned} r &= \check{r}, \quad \varphi = \alpha\check{\varphi} + \beta c\check{t}, \\ z &= \check{z}, \quad ct = \gamma\check{\varphi} + \delta c\check{t} \end{aligned}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ costanti qualunque, la metrica (13) conserva sia la forma cilindrica, sia la stazionarietà, ma non più la tempo-ortogonalità. E' immediato riconoscere nel rapporto costante $c\beta/\delta$ la velocità angolare $d\varphi/dt$ del riferimento soprassegnato rispetto al riferimento senza soprassegno. Dato allora che tra coordinate limitrofe (r', φ', z', ct') (r, φ, z, ct) , oppure (r, φ, z, ct) e $(\check{r}, \check{\varphi}, \check{z}, c\check{t})$, intercorre, sulla rispettiva frontiera di separazione, una corrispondenza di tipo (14) ne segue che riferimenti privilegiati contigui sono animati da moto reciproco rotatorio uniforme.

Riduzioni
indotte nel
sistema differen-
ziale dallo stato
di simmetria
cilindrico-statica.
Integrazione del
sistema di
Maxwell.

La situazione cilindrico-statica ammessa in ciascuna delle regioni A_α , introduce nel sistema di Maxwell-Einstein semplificazioni tali da consentirne l'integrazione in termini elementari espliciti.

Per ciò che riguarda il campo elettromagnetico, il sistema differenziale (5) (6) offre, per ciascuna delle regioni A_α , una delle tre alternative seguenti

$$\begin{aligned} E^1 &= -\theta/(\det \gamma_{ik})^{1/2} \\ E^2 &= E^3 = 0, \quad H_1 = H_2 = H_3 = 0 \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} H_2 &= -\Lambda/\gamma_4 \\ H_1 &= H_3 = 0, \quad E^1 = E^2 = E^3 = 0 \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} H_3 &= -\psi/\gamma_4 \\ H_1 &= H_2 = 0, \quad E^1 = E^2 = E^3 = 0 \end{aligned}$$

con θ, Λ, ψ costanti, b vettore unitario definente i singoli riferimenti S_α , $\gamma_{ik} \equiv g_{ik} + \gamma_i \gamma_k$. Date le circostanze fisiche ammesse, sembra ragionevole, sempre riservandoci il controllo a posteriori, scegliere la terza alternativa in A_1 (campo magnetico interno a un solenoide cilindrico), la prima in A_2 e in A_3 (campo elettrico

puramente radiale):

$$(17) \quad A_1: \quad H_3 = -\psi/\gamma_4, \quad H_1 = H_2 = 0, \\ E^1 = E^2 = E^3 = 0$$

$$(18) \quad A_2: \quad E^1 = -\theta/(\det \gamma_{ik})^{1/2}, \quad E^2 = E^3 = 0, \\ H_1 = H_2 = H_3 = 0$$

$$(19) \quad A_3: \quad E^1 = -\Delta/(\det \gamma_{ik})^{1/2}, \quad E^2 = E^3 = 0, \\ H_1 = H_2 = H_3 = 0.$$

Queste soluzioni si intendono naturalmente valide nei rispettivi riferimenti privilegiati. Per il momento le costanti ψ , θ , Δ sono indeterminate.

La simmetria cilindrico-statica, nonché i risultati elettromagnetici ora stabiliti (o in parte ipotizzati) inducono importanti semplificazioni anche nelle equazioni (7) di Einstein. Infatti esse si riducono a un sistema di tre sole equazioni indipendenti alle derivate ordinarie che si lasciano integrare in termini espliciti sicché anche le tre funzioni $k(r)$, $u(r)$, $R(r)$ diventano in ciascuna delle tre regioni A_α , funzioni note, contenenti un certo numero di costanti di integrazione. Di alcune di queste costanti, fisicamente non significative, si può scegliere il valore in base a criteri di semplicità. Di un'altra il valore è imposto da esigenze di regolarità. Lasciando indeterminate le altre costanti di integrazione, la metrica spaziotemporale assume nelle tre regioni e nelle rispettive coordinate privilegiate, le determinazioni seguenti

$$(20) \quad A_1: \quad ds^2 = \left(\frac{1 + h r'^2}{1 + h a^2} \right)^2 (dr'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2) + \\ + r'^2 \left(\frac{1 + h a^2}{1 + h r'^2} \right)^2 d\varphi'^2$$

$$(21) \quad A_2: \quad ds^2 = \left(\frac{r}{p} \right)^{2b} \left(\frac{1 - H(r/p)^{-2b}}{1 - H} \right)^2 \cdot \\ \cdot \left\{ \left(\frac{r}{p} \right)^{2b^2} (dz^2 + dr^2) + r^2 d\varphi^2 \right\} -$$

$$\begin{aligned}
 & -c^2 \left(\frac{r}{p} \right)^{-2b} \left(\frac{1-H}{1-H(r/p)^{-2b}} \right)^2 dt^2 \\
 (22) \quad A_3: \quad ds^2 = & A^2 \left(\frac{\hat{r}}{p} \right)^{2B} \left(\frac{1-K(\hat{r}/q)^{-2B}}{1-K} \right)^2 \cdot \\
 & \cdot \left\{ \left(\frac{q}{p} \right)^{2b^2} \left(\frac{\hat{r}}{q} \right)^{2B^2} (dr^2 + dz^2) + \hat{r}^2 d\hat{\varphi}^2 \right\} - \\
 & -c^2 A^{-2} \left(\frac{\hat{r}}{q} \right)^{-2B} \left(\frac{1-K}{1-K(\hat{r}/q)^{-2B}} \right)^2 d\hat{t}^2
 \end{aligned}$$

dove a, p, b, B, q sono costanti tuttora indeterminate e dove si è posto

$$\begin{aligned}
 (23) \quad h & \equiv \kappa \psi^2/8, \quad H \equiv \kappa \Theta^2/8b^2, \quad K \equiv \sigma \Delta^2/8B^2, \\
 A & \equiv \left(\frac{q}{p} \right)^b \left\{ 1 - H \left(\frac{q}{p} \right)^{-2b} \right\} / (1-H).
 \end{aligned}$$

Nel complesso i campi elettromagnetici (17) (18) (19) e le metriche (20) (21) (22) soddisfano, nelle rispettive regioni, al sistema differenziale di Maxwell-Einstein, qualunque siano i valori delle costanti indeterminate. Ma rimangono ancora da soddisfare le condizioni sulle diverse frontiere.

Si noti in proposito che, dal punto di vista esecutivo, l'imposizione delle condizioni su una determinata frontiera richiede l'impiego di un medesimo sistema di coordinate ai due lati della frontiera stessa. Ciò significa che nelle condizioni di raccordo che interessano il nostro problema saranno implicate non soltanto le costanti di integrazione presenti nelle (17) (18) (19) e nelle (20), (21) (22) ma anche le quattro costanti $\eta, \lambda, \sigma, \nu$ che esprimono il legame, ancora incognito, tra φ', t' , e φ, t e le quattro costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che esprimono l'analogo legame tra φ, t e $\hat{\varphi}, \hat{t}$.

Oltre alle condizioni di raccordo, rimangono da imporre due condizioni delle quali non si è ancora tenuto conto: (a) che il guscio esterno abbia, nel riferimento S_3 , l'assegnata velocità angolare ω , dato del problema; (b) che, nel medesimo riferimento S_3 , il guscio interno permanga in quiete. Mentre nessuna difficoltà presenta la prima delle due condizioni, qualche difficoltà sembrerebbe offrire la seconda, dato che il riferimento privilegiato S_3 non include nel suo ambito il guscio $\bar{\Sigma}$ che è ad esso estraneo. Ma a

tal proposito si può osservare che il riferimento S_3 con le sue coordinate $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}, \hat{c}\hat{t}$, può essere prolungato anche in A_2 fino al guscio interno $\bar{\Sigma}$, perdendo ivi il carattere di staticità ma conservando quello di stazionarietà. Ciò basta per esprimere la velocità angolare di $\bar{\Sigma}$ rispetto a S_3 e imporre il suo annullamento.

Sorvolando sui dettagli, mi limiterò a dire che l'effettiva applicazione delle condizioni di raccordo e delle condizioni (a) (b) conduce a determinare completamente una parte delle costanti e ad esprimere le rimanenti, compresa la densità di corrente j^k che abbiamo lasciata disponibile sul guscio esterno Σ , in funzione univoca delle costanti $\bar{\mu}_0, \bar{\rho}_0, \mu_0, \omega, r_0, R_0$, che è quanto dire in funzione univoca dei dati del problema.

Con quanto precede si è giunti a determinare una soluzione matematicamente esatta e completa del problema: *metrica spazio-temporale e campo elettromagnetico soddisfacenti al sistema di Maxwell-Einstein nelle tre regioni aperte A_1, A_2, A_3 ; soddisfatte tutte le condizioni di frontiera su $\bar{\Sigma}$ e su Σ ; nessuna indeterminazione nello stato fisico dei campi e dei due gusci (tensioni meccaniche e correnti interne); ogni elemento espresso in funzione univoca dei dati $r_0, \bar{\mu}_0, \bar{\rho}_0, R_0, \mu_0, \omega$. Vogliamo ora interpretare fisicamente i risultati.*

Interpretazioni
fisiche

L'esistenza di riferimenti cilindro-statici in ciascuna delle regioni A_α , se pure non rigorosamente galileiani, ne fa altrettanti osservatori privilegiati, particolarmente adatti ad una interpretazione quasi galileiana delle grandezze fisiche relative (campo elettrico, campo magnetico, campo gravitazionale standard etc.). La circostanza che i tre riferimenti S_α siano in moto reciproco rotatorio, quindi in moto reciproco accelerato, si accompagna al mutamento della situazione fisica generale dall'uno all'altro di essi. Più specificamente le formule esatte della teoria svolta, attraverso le disuguaglianze

$$(24) \quad \omega > \omega(2, 3) > \omega(1, 3) > 0$$

mettono in evidenza che rispetto all'osservatorio esterno S_3 i due riferimenti privilegiati S_2 ed S_1 appaiono muoversi entrambi in senso concorde a quello del guscio più grande, ma con velocità angolari più piccole. Si ripete dunque, se pure in maniera più complessa per la presenza del duplice guscio e della carica su uno di essi, l'effetto Thirring.

Naturalmente l'effetto di trascinamento si annulla coll'annullarsi

di ω , ciò che è fisicamente ovvio, ma anche coll'annullarsi di μ_0 , oppure di κ , costante di interazione gravitazionale. In S_1 e in S_2 sono presenti il campo magnetico e il campo elettrico qualitativamente previsti da Rindler, senza concomitanti effetti non machiani. Tutte le conclusioni sembrano anche in accordo con l'intuizione fisica: gli sforzi meccanici interni sui due cilindri hanno entrambi carattere di trazioni, quali si addicono a sforzi capaci di equilibrare le repulsioni coulombiane nel cilindro interno e nel cilindro esterno le forze centrifughe derivanti dalla sua rotazione.

Prima di concludere resta ancora da sottolineare un punto fisicamente importante. Nella formulazione del problema data originariamente da Ehlers e Rindler, così come nella successiva formulazione cilindrica di Carfora, il guscio esterno è dichiaratamente supposto essere elettricamente neutro. Ora la teoria esatta (Carfora) che ho appena finito di esporre mostra che se per elettricamente neutro si intende un corpo materiale privo sia di cariche sia di correnti, il problema non ammette una soluzione stazionaria del tipo indicato. Perché una soluzione stazionaria del tipo indicato possa fisicamente sussistere occorre ammettere che il cilindro esterno non soltanto sia un corpo materiale capace di sforzi meccanici interni ma che esso sia altresì dotato della struttura di conduttore perfetto. In un tal corpo potranno allora sussistere, senza dissipazione di energia e quindi mantenendosi indefinitamente, le correnti j^2 che la teoria richiede, senza peraltro che nel riferimento S_3 , cioè rispetto al guscio interno Σ , appaiano cariche presenti su Σ . In tal senso ridotto il cilindro esterno Σ potrà ben chiamarsi «neutro».

Se in luogo di un conduttore perfetto il cilindro esterno fosse supposto essere un conduttore ordinario, dotato di una resistenza elettrica interna più o meno alta, sembra sensato prevedere che il cilindro esterno, abbandonato a se stesso con una certa velocità angolare ω rispetto all'osservatore esterno, e pur dotato inizialmente delle correnti j^2 che la teoria prevede, dissiperebbe in calore Joule la propria energia cinetica rispetto a S_3 , nonché l'energia magnetica presente in A_1 , tendendo in un tempo più o meno lungo a disporsi in quiete rispetto al cilindro interno.

Vale ancora la pena di aggiungere un'osservazione. Un calcolo diretto mostra che, malgrado la presenza della corrente costante j^2 , la densità di energia magnetostatica del cilindro esterno in

S_3 è nulla. Ciò appare ben ragionevole dal punto di vista dell'intuizione fisica, visto che il trasporto di un elemento infinitesimo di corrente dall'infinito alla superficie del cilindro stesso, avendo luogo in un riferimento (S_3) in cui manca ogni campo magnetico, non implica il compimento di alcun lavoro.

Concludendo dirò che la teoria svolta da Carfora dà luogo a risultati di interesse fisico anche nell'ipotesi speciale che entrambi i cilindri siano elettricamente neutri. Il movimento rotatorio del cilindro esterno si mantiene allora per pura inerzia, dando ancora luogo ad un effetto, rigorosamente esatto, di tipo Thirring, che finora non era stato riconosciuto. Si tratta naturalmente di un effetto più complesso di quello tradizionale, per la presenza del doppio cilindro.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MACH E., *Die Mechanik in Ihrer Entwicklung Historisch-Kritisch Dargestellt*, Brockhaus, Leipzig, 1901. (traduzione italiana di D. Giamboli, Soc. ED. Dante Alighieri, Roma-Milano, 1909).
- [2] THIRRING H., *Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie*, Phys. Z. 19, 33-39, 1918. *Berichtigung zu meiner Arbeit: «Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie»*, Phys. Z. 22, 29-30, 1921.
- [3] LENSE J. & THIRRING H., *Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie*, Phys. Z. 19, 156-163, 1918.
- [4] LEVI-CIVITA T., *L'analogo del potenziale logaritmico*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Serie 5^a, 28, 101-109, 1919.
- [5] CATTANEO C., *Su una legge evolutiva dell'universo in termini intrinseci* (redatto nel 1940, inedito).
- [6] CATTANEO C., *Sulla validità del principio di Mach in relatività generale*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Serie 8^a, 32, 346-352, 1962.
- [7] RINDLER W., *Essential Relativity*, I^a Ed., Van Nostrand, New York, 1969.
- [8] EHLERS J. & RINDLER W., *An Electromagnetic Thirring Problem*, Phys. Rev. D, 4, 2453, 1971; Phys. Lett. 32A, 257, 1970.
- [9] CARFORA M., Tesi di laurea, 26 gennaio 1977 (Roma, inedita).
- [10] CARFORA M., *The Ehlers-Rindler problem in cylindrical symmetry*, (Nota I e II) Rend. Accad. Naz. Lincei, 64, 1978.



MAURO FRANCAVIGLIA

METODI E PROSPETTIVE MATEMATICHE IN RELATIVITA' GENERALE.

Descrivere, e soprattutto descrivere dettagliatamente le tecniche e i metodi matematici che trovano applicazione in relatività generale sarebbe un compito arduo e lungo, le cui dimensioni trascenderebbero di gran lunga i limiti di una breve esposizione. Innumerevoli sono infatti le discipline matematiche che la relatività utilizza: interi capitoli di matematica pura, non di rado altamente raffinata, trovano largo uso per una migliore comprensione e soluzione di problemi posti dalla teoria della relatività generale (fatto che, oggi, permea in realtà l'intero sviluppo della fisica teorica), quando addirittura non sia la relatività stessa, con i suoi interrogativi, a suggerire nuove strade alla ricerca matematica. Soprattutto in questi ultimi decenni, ma anche negli anni difficili della nascita di questa teoria, si è sentita l'esigenza di «matematizzare» e rendere così più potente la relatività: dalla geometria differenziale locale a quella globale, alla topologia differenziale stessa, dall'analisi differenziale classica all'analisi funzionale, spaziano i campi da cui la relatività attinge. Non si deve però intendere, con questo, che il profondo contenuto fisico della teoria gravitazionale di Einstein venga mutato o deformato dall'introduzione di metodi matematici che, a volte, possono sembrare eccessivamente astratti. Piuttosto, l'uso di una perfetta e rigorosa matematica, spesso contribuisce ad arricchire questo contenuto fisico e, con esso, a migliorare la comprensione di fenomeni apparentemente inspiegati o la scoperta di inaspettate relazioni tra fenomeni fisici prima considerati lontani. Ne sono chiari esempi i recenti grandi sviluppi delle teorie supersimmetriche della gravità, le quali aprono la via ad una integrazione (non solo formale) dei fenomeni gravitazionali con vari fenomeni di natura atomico-particellare; un altro esempio è dato dall'interpretazione matematica delle singolarità gravitazionali come vere e proprie singolarità del tessuto geometrico dell'Universo, con tutte le seguenti fruttuose applicazioni in campo astrofisico e cosmologico. Sarebbe pertanto sbagliato affermare che la relatività non è più una disciplina viva, o che, piuttosto, i suoi recenti sviluppi matematici abbiano solo un carattere formale. La teoria della relatività generale è invece, oggi più che mai, una teoria di interesse attuale,

che costituisce spesso un banco di prova ed uno stimolo per molti rami delle matematiche.

Come ho già detto, troppo tempo richiederebbe una appena dettagliata rassegna dei metodi e dei risultati matematici legati più o meno direttamente alla relatività. Pertanto, piuttosto che scegliere un ramo specifico, cercherò qui di scorrere brevemente (e, per ovvie ragioni, incompletamente) sui principali rami interessati.

E' utile incominciare con una breve «parentesi» storica. E' ben noto che Einstein era animato nelle sue ricerche dal solo desiderio di spiegare fisicamente il fenomeno fisico della gravitazione universale. Einstein giunse alla soluzione finale del suo problema intorno al 1916, con la pubblicazione della notissima memoria «Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie» ([1]). La base concettuale su cui la teoria è costruita è tuttavia il ben noto *principio di equivalenza*, che fu da Einstein intuito e formulato assai prima, nel 1907, nella memoria «Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen» ([2]). In quei nove anni dal 1907 al 1916 Einstein lavorò intensamente alla allora nascente teoria, e fu proprio in quei nove anni che la matematica pura fece prepotentemente irruzione nella teoria stessa. Leggiamo questa storia attraverso le parole di C. Lanczos ([3], pp. 90-91 e 92-93): «La vera questione è questa: come accadde mai che Einstein, il quale aveva timore degli schemi matematici, il quale si allontanava da ogni non necessaria complicazione matematica, improvvisamente costruì una teoria che portava all'evidenza i più astratti e remoti capitoli della matematica: calcolo differenziale assoluto, tensori, geometria differenziale e riemanniana — tutti soggetti così completamente distanti dagli strumenti usualmente impiegati dal fisico teorico per formulare le leggi della natura? Per capire questo sviluppo il principio di equivalenza è di centrale importanza e [...] l'ultima soluzione del 1915-1916 riconobbe la gravitazione come un fenomeno puramente geometrico e condusse ad una così tremenda rivalutazione del problema dello spazio e del tempo. [...] Sotto la guida di Marcel Grossman, Einstein si tuffò nello studio dei sistemi generali di coordinate [...] e si familiarizzò velocemente con gli strumenti del calcolo tensoriale. [...] Egli notò che in tutte le equazioni del calcolo assoluto, ogniqualvolta si usino coordinate qualsiasi, una nuova entità detta *tensore metrico* compare nelle equazioni stesse. [...] Emerse il fatto fondamentale che il tensore metrico permetteva una classe di geometrie assai più vasta della geometria euclidea». E non possiamo che concludere, ancora con Lanczos ([3], p. 95): «Le tre categorie, spazio, tempo e materia, sono alla fine ridotti ad una singola entità: lo Spazio. Se noi capiamo la struttura geometrica propria dell'Universo, noi contemporaneamente ne capiremo la struttura fisica, perché: *la fisica è geometria* ». A conclusione di questa breve parentesi storica, ricordiamo soltanto che, negli anni dal 1920 in poi, la ricerca di una teoria unitaria dei campi

fisici diede, attraverso l'opera di A. Einstein, H. Weyl, O. Kaluza e altri, un immenso stimolo allo sviluppo matematico di quella parte della geometria differenziale nota come *geometria non-riemanniana*. Al nome di Hermann Weyl è in particolare legato il tensore cosiddetto di *curvatura conforme*, quella parte cioè del tensore di curvatura di Riemann che risulta invariante per trasformazioni conformi della metrica; tensore che, notoriamente, svolge oggi un ruolo determinante in vaste parti della teoria della relatività generale.

Si è già detto sopra come, secondo la concezione di Einstein, la struttura geometrica del modello matematico dell'Universo sia una diretta controparte della struttura fisica dell'Universo stesso. Le ben note *equazioni di Einstein* sono infatti le:

$$(1) \quad G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$$

ove $G_{\alpha\beta}$ è il cosiddetto *tensore di Einstein* e $T_{\alpha\beta}$, detto *tensore di energia-impulso* (o *tensore di stress*) raccoglie in sé tutte le informazioni sulla materia-energia presente nell'Universo. Tali equazioni costituiscono un sistema di dieci equazioni nelle dieci incognite $g_{\alpha\beta}$ (le componenti del tensore metrico di una varietà 4-dimensionale V_4) e, come tali, giustificano direttamente l'intervento della geometria differenziale quale strumento matematico indispensabile in relatività. Ma le equazioni (1) sono equazioni di tipo differenziale, e la ricerca di loro soluzioni comporta quindi (in coordinate locali) lo studio di sistemi assai complicati di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Riconosciamo pertanto a priori, quali temi in grande della matematica di fondamentale importanza in relatività, sia il tema geometrico che quello analitico-funzionale. Questi due aspetti ovviamente non possono essere separati con un taglio netto; anzi, essi trovano nelle applicazioni relativistiche un giusto equilibrio e vicendevole appoggio. E soprattutto in recenti studi, con l'introduzione di tecniche di geometria differenziale in infinite dimensioni, essi si presentano spesso inestricabilmente legati.

Seguendo pertanto questa fittizia ripartizione tra aspetti geometrici ed analitici (ove, manifestamente, prepondera lo spirito geometrico e solitamente l'analisi entra come strumento accessorio, seppur indispensabile), incomincerò con una rapida scorsa alle vastissime applicazioni della geometria in campo relativistico. Come si è già detto, la geometria differenziale entra come ingrediente fondamentale nella descrizione dei modelli di Universo, o più brevemente degli *spazi-tempo*, attraverso il continuo uso di oggetti tensoriali (quali la metrica g , il tensore di curvatura, il tensore di Weyl, ecc.). L'esistenza nello spazio-tempo di una metrica g e quindi, con essa, di una connessione privilegiata (la *connessione di Levi-Civita*), potrebbe tuttavia condurre all'erronea convinzione che solo

la geometria riemanniana entri realmente in gioco, almeno quando si operi strettamente in relatività generale e non, ad esempio, nell'ambito delle teorie unitarie. Negli anni dall'ultimo dopoguerra in poi, però, si è andata sempre più delineando la varietà di aspetti geometrici legati allo studio degli spazi-tempo. Innanzitutto, l'approfondimento del concetto di *causalità locale* ha condotto a riconoscere che, nella struttura geometrica della teoria della relatività, diversi livelli di generalità sono interessati. Assai istruttiva è, a tal proposito, la lettura dei recenti lavori di J. Ehlers, F. Pirani e A. Schild, sulla «formulazione assiomatico-costruttiva delle teorie gravitazionali» ([4, 5]). Si osserva in essi come in relatività intervengano il livello di geometria differenziale pura (con tutti i legami, che vedremo oltre, con la topologia differenziale), il livello *proiettivo* (che entra nell'assiomatizzazione del concetto di moto in caduta libera, ovvero di moto geodetico), il livello *conforme* (che entra, appunto, nella caratterizzazione della struttura causale dello spazio-tempo), sino a giungere al livello riemanniano. Non deve stupire, anzi, la grande importanza che la *geometria conforme* riveste nella teoria della relatività; ciò è essenzialmente dovuto al fatto che alla metrica $g_{\alpha\beta}$ si richiede di avere la segnatura lorentziana (1, 3). Questo comporta, come ben noto, la distinzione tra vettori (e curve) dei tre generi spazio, tempo e luce, ed in particolare l'esistenza di un campo (almeno localmente regolare) di *coni di luce* (orientati). Ma le trasformazioni conformi della metrica g conservano inalterate le geodetiche nulle, e questo corrisponde fisicamente al lasciare inalterate tutte le possibili traiettorie dei segnali luminosi (o fotoni).

Di qui si comprende facilmente l'importanza del tensore di curvatura conforme di Weyl, alle cui proprietà geometriche corrispondono altrettante proprietà fisiche del campo gravitazionale. Già negli anni quaranta, soprattutto ad opera di Z. Petrov ([6]), fu introdotta una classificazione algebrica per il tensore di Weyl, basata sulle sue simmetrie e le sue autodirezioni nulle. Spesso, in relatività, le proprietà caratteristiche degli spazi-tempo cosiddetti *algebricamente speciali* (quelli, cioè, in cui il tensore di Weyl non possiede quattro autodirezioni nulle distinte) risultano di grande aiuto per lo studio di problemi pratici, quali ad esempio la ricerca di soluzioni esatte per le equazioni di Einstein, i problemi di separabilità, i problemi di radiazione gravitazionale.

Legato alla suddetta classificazione algebrica restò così l'uso in relatività del *formalismo delle tetradi*, che altro non è se non l'uso di *basi anolome* nello spazio-tempo ([7]). Di fondamentale importanza, sia nella teoria che nelle applicazioni, fu in particolare l'introduzione (intorno agli anni sessanta) del formalismo delle *tetradi nulle* e, con esso, dei *formalismi bivettoriali e spinoriali*. Il formalismo delle tetradi nulle si basa ([8]) sull'osservazione che, operando sul fibrato tangente complessificato $TV_4 \otimes C$, è possibile scegliere in V_4 una base anoloma associata a quattro vettori complessi nulli, di cui due reali e due complessi coniugati.

gati (le cui parti reale ed immaginaria siano di tipo spaziale e formino a loro volta una base anolonomica con i due vettori nulli reali). E' proprio nel passaggio dal campo reale R al campo complesso C che è insita una tra le importanti conquiste della matematica in relatività: la scoperta che, come già in vari altri campi della fisica, l'ausilio dell'analisi e della geometria in campo complesso possono essere altamente costruttivi.

Si è detto prima che dalle tetradi nulle al formalismo spinoriale il passo è breve. L'insieme di queste tecniche, elaborate tra il 1960 ed il 1965 ad opera soprattutto di E. Newman e R. Penrose (e noto appunto come formalismo di Newman-Penrose; [8]) si basa essenzialmente sulla circostanza che il *gruppo unimodulare* $SL(2, C)$, gruppo operante naturalmente come gruppo di trasformazioni sullo spazio dei 2-tensori antisimmetrici autoduali, risulta essere il ricoprimento universale a due foglietti del gruppo L_{++} delle trasformazioni proprie ortocrone di Lorentz. Non ci dilunghiamo oltre, rinviando il lettore all'esposizione contenuta in [9]. Per completezza, è bene ricordare che, come già accennato sopra, all'uso dell'algebra spinoriale sono legati formalismi equivalenti, quali il formalismo delle *diadi spinoriali* o il *formalismo bivettoriale* ([10]); per una comprensiva esposizione in italiano si veda [11].

L'esempio fornito dalle tecniche spinoriali pone l'accento su di un altro importante ramo delle matematiche che trova applicazione in relatività generale: la teoria dei gruppi, e, in particolare, dei gruppi di Lie e delle loro rappresentazioni. Storicamente parlando, i gruppi di Lie fanno la loro comparsa in fisica teorica sin dagli anni venti, con la sistematica applicazione alla meccanica quantistica. Tuttavia, per trovarne considerevoli applicazioni in campo relativistico dobbiamo ancora aspettare il recente dopoguerra, sino a giungere ai giorni nostri in cui l'uso di metodi gruppali in relatività si rivela spesso indispensabile (cfr. [12]).

Intimamente legato ai formalismi spinoriali è il vasto e ambizioso programma di R. Penrose, comunemente noto come *twistor program* ([13]). Tale programma è nato come tentativo di portare il *gruppo conforme* dello spazio di Minkowski in un piano di primaria importanza; tale gruppo ammette come ricoprimento a quattro foglietti il *gruppo speciale unitario* $SU(2, 2)$, e i *twistors* (di spazio piatto) sono oggetti opportunamente definiti, che si trasformano covariantemente sotto l'azione di quest'ultimo gruppo. L'obiettivo del *twistor program*, disciplina che oggi rivela insospettiti aspetti matematici, è, in parole povere, derivare lo spazio-tempo relativistico e le sue leggi soltanto a partire da concetti gruppali e combinatori. Osserviamo inoltre che anche nell'introduzione dei *twistors* appare chiaramente il ruolo svolto dal campo complesso: lo spazio dei *twistors* Π può essere infatti equivalentemente definito come C^4 munito di una opportuna struttura hermitiana indefinita.

Quest'ultima osservazione ci conduce indirettamente a considerare i recenti

(e meno recenti) studi sulle applicazioni della *geometria differenziale complessa* in relatività. Essi furono stimolati essenzialmente dalla scoperta, quasi casuale, che opportune «trasformazioni complesse di coordinate» possono mandare soluzioni note per le equazioni di Einstein in altre soluzioni, che risultino matematicamente e fisicamente differenti dalla soluzione iniziale: nella fattispecie, il primo esempio fu fornito dalla transizione che manda la metrica di Schwarzschild nella metrica di Kerr ([14]). Queste circostanze suggeriscono, quando le soluzioni interessate abbiano metrica analitica reale, di considerarne opportune «*estensioni analitiche complesse*», cioè varietà $(W_4, \tilde{g})$ ove W_4 sia una varietà differenziabile 4-dimensionale sul campo complesso $\mathbb{C}$ con metrica analitica $\tilde{g}$ soddisfacente le equazioni di Einstein $G_{\alpha\beta} = 0$, e che ammettano la varietà (V_4, g) come opportuna *sezione reale*. In tale direzione possono inquadrarsi gli studi di E. Flaherty, che recentemente ha introdotto in relatività i concetti di *varietà hermitiane e kähleriane modificate*, concetti che sembrano avere un promettente futuro sia nelle applicazioni che nella teoria ([15]). Le soluzioni complesse delle equazioni di Einstein hanno anche trovato applicazione in studi concernenti l'immersibilità isometrica di certe soluzioni reali in varietà algebriche reali, sottovarietà di opportuni spazi pseudo-euclidei $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 6$ ([16]).

Ancora nel quadro delle tecniche di geometria complessa vanno visti i recentissimi studi di E. Newman e collaboratori, sugli spazi-tempo cosiddetti «*paradisiaci*» (dall'inglese: *heavenly space-times*), che chiameremo brevemente *H-spazi-tempo*. Assegnato uno spazio-tempo V_4 asintoticamente semplice nel senso di Penrose (cioè, in sostanza, la cui struttura all'infinito ricalchi la struttura dell'infinito conforme dello spazio di Minkowski; cfr. [17]), è possibile associare ad esso un H-spazio-tempo $\mathcal{H}(V_4)$, opportunamente definito attraverso il concetto di cosiddetti *tagli buoni* (complessi) eseguiti su $\mathcal{T}^+$ (simbolo con cui indichiamo l'infinito futuro di V_4). Per tale costruzione si rimanda alla lettura di [18]. Un fatto importante, almeno dal punto di vista del matematico, è il sussistere delle seguenti quattro circostanze:

1) introdotti opportunamente *twistors asintotici* (quali naturali generalizzazioni a spazi-tempo asintoticamente semplici dei twistors di spazio piatto) e detto $\Pi(\mathcal{T}^+)$ il loro insieme, che costituisce in modo naturale uno spazio vettoriale, lo spazio delle curve olomorfe dello spazio proiettivo associato a $\Pi(\mathcal{T}^+)$ è una varietà complessa 4-dimensionale diffeomorfa ad $\mathcal{H}(V_4)$;

2) $\mathcal{H}(V_4)$ è una varietà kähleriana;

3) la metrica di $\mathcal{H}(V_4)$ è la complessificazione di una metrica kähleriana modificata nel senso di Flaherty (cfr. [15], § XI).

4) i tagli buoni di $\mathcal{T}^+$ possono essere interpretati come sezioni globali di opportuni *fibrati olomorfi* non triviali su $S_2 \times S_2$ (con S_2 indicandosi la sfera reale a due dimensioni).

Quest'ultima circostanza (la cui dimostrazione è dovuta a recenti studi di W. Curtis e D. Lerner, [19]) dischiude nuovi orizzonti alla teoria degli H-spazi-tempo; in particolare, essa contribuisce a mettere in risalto, in modo estremamente semplice, come negli studi relativistici possano entrare, attraverso l'uso di fibrazioni vettoriali o di fibrazioni principali, concetti matematici di tipo topologico differenziale quali le *classi caratteristiche di Chern*. Più avanti accennerò a tali interventi, i quali vanno facendosi sempre più comuni in relatività come in altri rami della fisica teorica e matematica (teorie di Yang-Mills, solitoni, ecc. .).

Tornando al tema delle tecniche gruppali, se ne possono brevemente ricordare alcune altre importanti applicazioni. Innanzitutto la teoria delle *azioni dei gruppi di Lie* su varietà differenziabili trova vaste applicazioni nello studio di soluzioni esatte aventi particolari simmetrie, la cui rigorosa definizione è data richiedendo che sullo spazio-tempo (V_4, g) agisca un opportuno gruppo di Lie di movimenti (per esempio, il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ per la simmetria sferica).

Una «curiosità storica» è poi rappresentata dai cosiddetti *Universi di Bianchi* ([20]), la cui fondamentale importanza in certe questioni di astrofisica relativistica va facendosi sempre più nota. Essi costituiscono infatti la classe di soluzioni esatte per le equazioni di Einstein che presentino caratteri di *isotropia* ed *omogeneità* per le sezioni tridimensionali di tipo spaziale. La loro caratterizzazione risale agli ultimi quindici anni e si basa essenzialmente sulla classificazione di tutte le possibili varietà tridimensionali (V_3, g^*) , con metrica g^* definita positiva, che ammettano gruppi di movimento. Quest'ultima classificazione, che costituisce un'interessante capitolo della geometria differenziale riemanniana, risale agli inizi di questo secolo, per opera dell'insigne matematico L. Bianchi ([21]). Tuttavia, essa restò praticamente ignorata in relatività sino agli anni sessanta, e fu poi riscoperta indipendentemente dalla scuola russa ([22, 23]).

Gruppi di simmetrie svolgono anche un ruolo importante nello studio di soluzioni esatte munite di strutture di separabilità ([24]).

Gruppi di Lie entrano infine in relatività attraverso l'uso della teoria delle fibrazioni, su cui torneremo più avanti.

Veniamo dunque ad una brevissima rassegna riguardante le applicazioni in relatività delle tecniche di topologia differenziale. L'introduzione di tali tecniche, dovuta a numerosi studiosi, tra cui possiamo ricordare R. Penrose, S. Hawking, A. Lichnerowicz, è soprattutto legata ai problemi di causalità, a problemi di natura globale ed alle definizioni e formalizzazioni del concetto di singolarità per uno spazio-tempo. Chiare esposizioni possono trovarsi, oltre che nel già citato trattato [17], nella memoria [25].

Lo studio delle proprietà legate alla *causalità* e *cronologia* richiede l'intervento delle proprietà locali e globali delle geodetiche nulle e temporali di uno spazio-tempo (V_4, g) ; con il proposito di rendere sempre più chiaro il ruolo da esse

giocato, sono stati introdotti alcuni concetti, ormai di largo uso, quali i concetti di *passato e futuro di un punto* (o di una sottovarietà di V_4), di *insiemi acronali*, e così via. Poiché gran parte di tali concetti possono essere definiti per una qualsiasi varietà V_n a metrica iperbolica normale g , purché di dimensione $n \geq 2$, è assai probabile che essi trovino, in un prossimo futuro, larghe applicazioni allo studio di equazioni differenziali alle derivate parziali, e in particolare a quelle di tipo iperbolico. (cfr. [26]).

Con il passaggio alla causalità globale da quella locale, tecniche ancora più raffinate si rivelano spesso utili. Teoremi di immersione, teorema di Sard, metodi di topologia combinatoria, sono largamente utilizzati per lo studio degli insiemi passati e futuri, per la definizione di spazi-tempo cosiddetti *fortemente causali*, per fornire criteri di esistenza di geodetiche nulle e di curve causali chiuse. Si apre in questo contesto tutto un vasto studio, di carattere geometrico-differenziale, riguardante l'estensione al caso di metriche indefinite di svariati teoremi già noti nel caso di metriche strettamente riemanniane: tra essi citiamo i *criteri di completezza geodetica*, i *teoremi di Jacobi* sui punti coniugati, la *teoria di Morse* e i suoi legami con i campi di Jacobi lungo le geodetiche. Questa parte della geometria e topologia differenziale, riguardante il caso indefinito, era praticamente quasi inesplorata prima che l'esigenza di sue applicazioni in relatività ne stimolasse approfonditi studi (si veda [20], §5; [27, 28]). Soprattutto nel contesto della teoria di Morse generalizzata agli spazi iperbolici normali si incontrano numerosi problemi, una cui piena risoluzione può essere ottenuta soltanto con il ricorso a tecniche di analisi funzionale e geometria differenziale in dimensione infinita. Ad esempio, gli spazi delle curve causali (e loro opportune generalizzazioni) possono essere muniti di una struttura di varietà differenziabile modellata su di uno spazio di Hilbert, in modo che il funzionale di energia J (definito naturalmente come l'integrale della norma $g(\dot{x}, \dot{x})$) ammetta il significato di *funzione di Morse*, e i suoi punti critici siano tutte e sole le geodetiche nulle ([29]).

E' poi chiaro che nell'affrontare problemi coinvolgenti la struttura globale di uno spazio-tempo, la topologia differenziale sia necessariamente chiamata in causa. Per la costruzione di esempi e controesempi riguardanti i concetti di causalità forte, l'orientabilità globale e varie altre proprietà globali di uno spazio-tempo, largo uso può essere fatto di una tecnica costruttiva che nella letteratura inglese viene denominata con i suggestivi nomi di «cutting and pasting» ovvero «surgery on manifolds» (lett. «chirurgia sulle varietà»). Questa tecnica consiste, in parole povere, nella costruzione di nuovi spazi-tempo a partire da spazi-tempo noti, per mezzo di tagli, passaggi al quoziente e saldature lungo i tagli operati. Esempi assai interessanti possono trovarsi in [30, 31, 32].

Come in tutti i problemi globali che interessino (direttamente o indirettamente)

l'uso di fibrazioni, anche in relatività non è insolito incontrare *ostruzioni topologico-differenziali*, le quali, notoriamente, si traducono attraverso il concetto di *classi caratteristiche*. Ci imbattiamo così nelle classi di Chern, di Pontriagin, di Stiefel-Whitney ([33, 34]). A titolo di esempio possiamo citare due casi interessanti:

1) il carattere di lorentzianità della metrica g impone restrizioni topologiche alla varietà V_4 . Infatti, una V_4 ammette una metrica lorentziana globale se e solo se essa ammette un campo globale mai nullo di vettori del genere tempo, e questo accade, nel caso di varietà compatte, se e solo se è nulla la caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(V_4)$;

2) un risultato di R. Geroch ci assicura che una (V_4, g) non compatta ammette un campo globale di tetradi nulle se e solo se essa ammette una *struttura spinoriale* (cioè, se esiste un fibrato principale W su V_4 , avente il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ come gruppo strutturale e soddisfacente opportune proprietà). Facendo ricorso ad una generalizzazione di argomenti dovuti ad Haefliger, è poi possibile dimostrare che ciò è equivalente all'annullarsi in V_4 della seconda classe di Stiefel-Whitney (cfr. [35]).

Altre importanti questioni geometriche si incontrano nello studio delle cosiddette *ipersuperfici di Cauchy* e dei loro *domini di dipendenza* e *di influenza*. Dal punto di vista fisico, il dominio di dipendenza $D^*(\mathcal{S})$ di un insieme acronale $\mathcal{S}$ è la regione di spazio-tempo la cui situazione fisica può essere causalmente determinata dalla sola conoscenza dei dati su $\mathcal{S}$ ([36]). Questo ci porta direttamente nel cuore delle applicazioni dell'analisi: si assume infatti che le leggi della fisica siano regolate da equazioni alle derivate parziali invarianti per trasformazioni di Lorentz, e ne consegue che le loro bicaratteristiche saranno le geodetiche nulle uscenti da $\mathcal{S}$. Su $\mathcal{S}$ si avrà quindi un *problema di Cauchy* e $D^*(\mathcal{S})$ sarà equivalentemente interpretabile come «sviluppo di Cauchy futuro» di $\mathcal{S}$ stessa. A questo punto, si innestano nella questione gli studi sui problemi di Cauchy in generale (siano essi ben posti o mal posti), con tutto il bagaglio di analisi classica e di analisi funzionale ad essi associato: esistenza di soluzioni forti e deboli, caustiche ed equazioni eiconali (la cui fondamentale importanza fisica è ben nota; cfr. [36]), uso di tecniche coinvolgenti operatori differenziali in V_4 , metodi di spazi normati (in generale riguardanti spazi di Sobolev o loro opportune generalizzazioni). Un problema a questi legato, sebbene esso non sia direttamente parte della teoria della relatività, è lo studio, con metodi analoghi, delle equazioni di moto ondoso in una varietà (V_4, g) curva ([26, 37]).

Più avanti tratteremo del problema di Cauchy per le equazioni di Einstein, il quale, seppur ancora legato a quanto già detto sopra, manifesta una natura assai diversa per il fatto che l'oggetto da propagare oltre la superficie iniziale $\mathcal{S}$ è la metrica g stessa, cioè la struttura geometrica della varietà; tale problema

entra ovviamente nella ricerca di soluzioni esatte di tipo generale.

Ricorderò ancora che, con l'ausilio del concetto di dominio di dipendenza, è possibile definire, utilizzando soltanto proprietà geometriche della varietà V_4 , cosa debba intendersi per *varietà* (V_4, g) di tipo globalmente iperbolico. Le varietà globalmente iperboliche svolgono oggi un ruolo fondamentale in certe questioni di relatività, essendo apparentemente le più generali varietà iperboliche a cui si possa estendere gran parte di quanto già noto per gli spazi strettamente riemanniani (teoria di Morse, ecc.). E' interessante notare l'ulteriore profondo legame con la teoria delle equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico: l'iperbolicità globale di (V_4, g) è infatti equivalente alla «iperbolicità globale del D'Alembertiano di g ($\square_g$)», nel senso già introdotto nel 1952 dal J. Leray, in connessione a studi di natura puramente analitica ([38, 39]). L'uso del concetto di iperbolicità globale in relatività generale ha permesso di comprenderne meglio le importanti controparti di natura geometrica.

Tutte le tecniche e le proprietà sopra descritte sono state e sono tuttora di centrale importanza per lo sviluppo della teoria delle *singolarità dello spazio-tempo*. Sebbene (data la natura indefinita della metrica g) non si possa a priori dare una unica definizione di spazio-tempo singolare, sembra che, almeno nella maggioranza delle opinioni, la completezza per geodetiche nulle e temporali sia la richiesta minima per definire la «non-singolarità» di (V_4, g) ([40]; si veda anche [41]). Svitati teoremi (dovuti essenzialmente a S. Hawking e R. Penrose), la cui dimostrazione richiede appunto l'uso di eleganti e difficili metodi geometrici, forniscono criteri sufficienti per la non completezza per geodetiche nulle o temporali, e, pertanto, costituiscono altrettanti *criteri sufficienti di singolarità* (cfr. [17], §8). Grandi interrogativi restano tuttavia aperti in questo affascinante capitolo della relatività generale (per esempio, come definire in modo universalmente chiaro il concetto di singolarità e come fornirne criteri necessari e sufficienti): interrogativi che solo il proseguimento e l'approfondimento matematico delle ricerche già intraprese potranno (e forse presto) sciogliere. Non è da escludersi che, oltre alle succitate tecniche geometrico-differenziali, in tale programma possano rivelarsi utili metodi di carattere puramente topologico o analitico-funzionale. Ad esempio, è possibile (e se ne hanno già alcune prime indicazioni; cfr. [42]) che simili metodi aiutino a risolvere il problema aperto della *genericità* (o meno) *delle soluzioni singolari*, cioè che permettano di rispondere al quesito: in quale spazio funzionale di soluzioni, e con quale struttura topologica su di esso, le soluzioni singolari possono essere caratterizzate da proprietà topologiche quali la proprietà di costituire un insieme denso, oppure generico, oppure di misura nulla?

Per concludere questo scorcio riguardante le applicazioni della geometria, non si può non accennare all'uso della teoria delle fibrazioni in campo relativistico.

Si sono già incontrati in precedenza i casi particolari delle strutture spinoriali e delle fibrazioni olomorfe, associate ai problemi di natura twistoriale. Tra i più interessanti studi riguardanti l'uso dei fibrati su V_4 per lo studio delle teorie della gravitazione (sia classiche che relativistiche), spiccano i lavori di A. Trautman ([43, 44]). Questi costituiscono, in un certo senso, un complemento ai già citati lavori di J. Ehlers, F. Pirani e A. Schild, in quanto essi presentano da un punto di vista differente l'esistenza dei livelli proiettivo, conforme e riemanniano. Alla base dell'approccio fibrazionale possiamo porre gli ormai classici studi di H. Weyl ed E. Cartan; già nel 1921, Weyl realizzò la coesistenza di una struttura proiettiva e di una struttura conforme ([45]), e nel 1922-1923 Cartan, nel dare i fondamenti della teoria oggi nota come *teoria gravitazionale di Einstein-Cartan*, introdusse le connessioni lineari in ambito newtoniano, definendo per la prima volta il concetto di *torsione* e gettando le basi della teoria generale delle connessioni [46]. Da questi pochi fatti è facile comprendere l'importanza di una trattazione delle teorie gravitazionali mediante l'uso delle G-strutture e dei fibrati ad esse associati. Nelle varie teorie gravitazionali, infatti, dalla teoria newtoniana a quelle relativistiche, vari sottogruppi del gruppo lineare $GL(4, \mathbb{R})$ sono coinvolti, insieme con i gruppi di Lorentz, di Poincaré, i gruppi proiettivi e conformi. A titolo di esempio, ricordiamo che il *fibrato di Lorentz* è una restrizione al gruppo di Lorentz del fibrato dei riferimenti lineari su V_4 .

Fibrazioni vettoriali si sono anche rivelate utili nella teoria delle singolarità dello spazio-tempo, ove B. Schmidt ([47]) ha ottenuto l'importante concetto di *b-frontiera* di una V_4 a partire dal fibrato dei riferimenti ortonormali di (V_4, g) .

Lasciamo ora il campo della geometria per addentrarci nel vivo delle applicazioni dell'analisi in relatività. Già si è detto che l'analisi spesso entra come «ingrediente addizionale» in svariati problemi di natura geometrica (per esempio, l'intervento dell'analisi complessa in più variabili nella teoria di twistors [48] e delle varietà kähleriane modificate [15], l'intervento dell'analisi funzionale in problemi globali, etc.). Tuttavia, il campo più affascinante della relatività generale in cui l'analisi entra come strumento principale è certamente costituito dal già menzionato *problema di Cauchy per le equazioni di Einstein* ([39, 49, 50]). L'esistenza e l'importanza di questo problema nascono ovviamente dal fatto che le equazioni $G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ sono equazioni alle derivate parziali e, come tali, non sono direttamente risolubili (salvo particolari casi), ma soltanto suscettibili di una «formulazione ai dati iniziali». Il problema di Cauchy in relatività assume tuttavia due caratteristiche che lo distinguono nettamente da analoghi problemi riguardanti altre teorie fisiche: innanzitutto la *non-linearità* e l'*autointerazione* delle equazioni gravitazionali; in secondo luogo, il fatto stesso che l'oggetto incognito sia la metrica g dello spazio-tempo, cioè la sua struttura geometrica stessa. Queste due caratteristiche (la prima già menzionata in precedenza) rendono assai più

complessa e delicata la trattazione del problema di Cauchy: la seconda, in particolare, implica che, una volta che siano assegnati i dati iniziali su di una ipersuperficie spaziale $\mathcal{S}$, sottovarietà tridimensionale della varietà incognita (V_4, g) , il dominio di dipendenza $D^+(\mathcal{S})$ sia anch'esso incognito e pertanto risulti incognita la regione di spazio-tempo in cui determinare la soluzione cercata. Questo apparente paradosso è in realtà affrontato come segue: si assegna una varietà tridimensionale $\mathcal{S}$ con opportuni dati iniziali (vedremo tra breve quali), e si cercano una varietà lorentziana (V_4, g) ed una immersione isometrica $i: \mathcal{S} \rightarrow V_4$ tali che le equazioni di Einstein siano soddisfatte in (V_4, g) e l'immagine $i(\mathcal{S})$ sia una ipersuperficie di Cauchy in V_4 . Una terza caratteristica rende poi il problema di Cauchy ulteriormente complicato: data la tensorialità delle equazioni di Einstein, due metriche distinte ma isometriche non determinano due spaziotempo fisicamente distinti. Le soluzioni sono pertanto determinabili solo a meno di diffeomorfismi; questo comporta, a livello analitico, l'introduzione di cosiddette *condizioni di gauge* che «compensino» i gradi di libertà non vincolati: solo allora sarà possibile affrontare con rigore problemi di esistenza e unicità. La scelta delle condizioni di gauge è varia, ma generalmente si basa sulle cosiddette «condizioni di gauge armonica» (cioè la scelta di coordinate armoniche, ovvero di metriche di riferimento su cui imporre opportune condizioni di armonicità); in tale modo le equazioni di Einstein «ridotte» assumono un ben definito tipo, e per la precisione assumono il carattere di sistema iperbolico. A questo punto, tutto un vasto capitolo della teoria dei sistemi di equazioni alle derivate parziali trova larga applicazione in relatività: teoremi locali di esistenza e unicità sono ottenuti o per rappresentazione diretta con metodi distribuzionali (soluzioni fondamentali; si veda p. e. [39]), oppure per mezzo di opportuni metodi di analisi funzionale (generalmente teoremi di esistenza in spazi di Banach e di Sobolev). Alle tecniche standard si affiancano naturalmente molti dei concetti di natura topologico-differenziale già incontrati in precedenza (domini di dipendenza, proprietà di iperbolicità globale, causalità). La situazione si fa ancora più complicata quando si affronti lo studio dell'esistenza e unicità globali (sia nello spazio che nel tempo); a tal proposito, nuove tecniche per lo studio delle equazioni alle derivate parziali su varietà differenziabili vengono suggerite dalla relatività stessa: tra queste possiamo ricordare le generalizzazioni dei metodi di Dionne, dovute essenzialmente a S. Hawking e R. Ellis ([17]); le tecniche di teoria dei semigrupp non-lineari utilizzate da A. Fischer e J. Marsden ([51, 52]); l'uso di spazi di Sobolev modificati e le stime energetiche recentemente introdotti da Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou e l'autore ([53]).

Sina dai primi studi di A. Lichnerowicz riguardanti il problema di Cauchy, è noto che le dieci equazioni di Einstein non debbono però considerarsi tutte sullo stesso piano: è infatti sempre possibile, con opportune scelte di coordinate o di

condizioni di gauge, distinguere tra esse sei equazioni di tipo evolutivo, mentre le quattro restanti vengono invece a costituire altrettanti *vincoli* sui dati iniziali in $\mathcal{S}$. Il sistema così trasformato si dice essere *in involuzione*, nel senso che, supposte risolte le sei equazioni di evoluzione con dati soddisfacenti in $\mathcal{S}$ ai quattro vincoli, questi ultimi risultano conservati lungo l'evoluzione. Si verifica poi che i dati iniziali su $\mathcal{S}$ possono essere convenientemente assegnati per il tramite di due tensori simmetrici in $\mathcal{S}$, siano essi g e k . Questi tensori sono (a posteriori) la metrica indotta su $\mathcal{S}$ e la seconda forma fondamentale (o forma di Gauss) di $\mathcal{S}$ come sottovarietà immersa in (V_4, g) . Le quattro equazioni di vincolo risultano infine formare un sistema ellittico di equazioni alle derivate parziali in $\mathcal{S}$.

Le suddette circostanze hanno aperto (a partire dagli anni sessanta) un altro importante campo di studi in relatività, in cui (soprattutto recentemente) le tecniche di geometria differenziale in dimensione infinita hanno costituito e costituiscono tuttora uno strumento essenziale. Tale campo di studi, noto generalmente come *formulazione dinamica della relatività generale*, ha lo scopo di descrivere la teoria della relatività come teoria di tipo meccanico, riguardante un sistema dinamico a infiniti gradi di libertà, e possibilmente come sistema del tipo lagrangiano o hamiltoniano ([54, 55, 56]). Tale programma ha recentemente iniziato ad assumere una ben definita portata e a riscuotere un certo interesse. L'idea centrale consiste nell'interpretare localmente lo spazio-tempo V_4 come una successione di sue sezioni tridimensionali spaziali che si evolvano nel «tempo» t ; la metrica g di V_4 deve risultare opportunamente costruita a partire dalle metriche $g(t)$ di ogni sezione $t = \text{costante}$ e dalla conoscenza di come ogni sezione sia immersa nello spazio-tempo ambiente. Scelta una varietà tridimensionale M , si assume come spazio delle configurazioni lo spazio $\mathcal{M}$ delle metriche riemanniane su M , il quale costituisce varietà differenziabile di Hilbert, Banach o Fréchet, a seconda del grado di regolarità richiesto a tali metriche. Le equazioni di Einstein diventano pertanto equazioni di evoluzione per la metrica $g \in \mathcal{M}$ e per il suo momento coniugato π , che risulta algebricamente equivalente alla seconda forma fondamentale k di M immersa in V_4 . Il quadro è in realtà più complicato, in quanto la già citata tensorialità delle equazioni di Einstein e la presenza di quattro equazioni vincolari sui dati iniziali (g e k), di tipo ellittico anziché iperbolico, rendono più delicata dal punto di vista matematico la trattazione del problema. In questo ordine di idee si innesta la *teoria del superspazio* introdotta da Wheeler ([57]) e più tardi resa matematicamente rigorosa (cfr. [58, 59]).

Nella formulazione dinamica della relatività generale veniamo pertanto ad incontrare raffinate tecniche di geometria differenziale in spazi funzionali, o, come spesso si suole dire, di *analisi globale in dimensione infinita*: geometria simplettica in varietà funzionali, teoria dei gruppi di Lie su spazi di Fréchet o di Banach

(cfr. [60]), calcolo delle variazioni in grande, teoria dei momenti e delle riduzioni di spazi delle fasi attraverso l'uso di integrali primi ([61]), teoria delle sottovarietà e varietà quoziente di varietà funzionali. Questi campi di studio sono oggi in fase di sviluppo e per molta parte ancora vastamente incompleti: anzi, essi sono campi che le applicazioni in relatività stanno contribuendo ad approfondire, se non addirittura a stimolare.

Moltri altri rami delle matematiche sono più o meno direttamente coinvolti nei recenti sviluppi della teoria della relatività generale: recentemente, anche la teoria delle catastrofi ha trovato applicazioni nello studio dei fenomeni singolari, e persino l'uso degli elaboratori elettronici si è rivelato utile, non solo per l'ausilio nella risoluzione di problemi sperimentali, ma anche, con gli sviluppi dei linguaggi formali, quale potente strumento di calcolo astratto.

Altre importanti questioni non sono state qui discusse, per comprensibili ragioni di spazio, con la speranza che questa rapida rassegna sia riuscita a fornire almeno un vaga idea di quanto la matematica contribuisca agli sviluppi della teoria della relatività. Per concludere, leggiamo le parole che R. Nevanlinna pronunciò nel 1973 a Bonn, in occasione di un congresso su «Nuovi metodi matematici in fisica e problemi in relatività generale» ([62]): — C'è una misteriosa coincidenza tra il mondo empirico e il mondo delle idee teoriche. [...] Il tempo prima e immediatamente dopo l'inizio del nostro secolo fu un periodo di interazioni estremamente fruttuose tra fisica e matematica. Sembra però che questa cooperazione si sia andata indebolendo negli ultimi decenni. All'inizio del secolo tutti i matematici più insigni (Hilbert, Klein, Weyl, Von Neumann, e altri) diedero importanti contributi anche alla fisica. Più tardi le cose sono cambiate: il rapido progresso della matematica pura, astratta, ha diminuito l'interesse dei matematici, creando quindi un solco tra le due scienze. A lungo andare questo condurrà a conseguenze negative, tra cui, e non per ultime, alla matematica stessa. Perciò, noi dovremmo in tutti i modi cercare di ricostruire e promuovere la cooperazione tra matematica e fisica. —

BIBLIOGRAFIA

- [1] EINSTEIN A., *Ann. der Physik* 49, 769 (1916).
- [2] EINSTEIN A., *Jahr. d. Rad. und Elek.* 4, 411 (1907).
- [3] LANCZOS C., *The Einstein Decade (1905-1915)*, P. Elek Ltd. (London, 1974).
- [4] EHLERS J., PIRANI F., SCHILD A., *The geometry of free falls and light propagation*, in «General Relativity», L. O. Raifeartaigh ed., (Oxford, 1972); p. 63.
- [5] EHLERS J., *Survey of General Relativity theory*, in «Relativity, Astrophysics and Cosmology», W. Israel ed., Reidel Publ. Co., (Dordrecht, 1973); p. 1.
- [6] PETROV Z., *Einstein Spaces*, Pergamon Press (Oxford, 1969).
- [7] PIRANI F. A. E., *Acta Phys. Polonica* 15, 389 (1956); *Phys. Rev.* 105, 1089 (1957);

- Bull. Ac. Polon. Sc. 5, 143 (1957a).
- [8] NEWMAN E., PENROSE R., Journ. Math. Phys. 3, 566 (1962).
 - [9] UDESCHINI E. BRINIS, *Questioni relativistiche nella trattazione spinoriale*, Atti del 111° Convegno Naz. di Relatività e Fisica della Gravitazione, Torino, Settembre 1978.
 - [10] CAHEN M., DEBEVER. R., DEFRISE L., Journ. Math. Mech. 16, 761 (1967).
 - [11] BAMPI F., CAVIGLIA G., MASSA E., ZORDAN C., *Bivettori complessi in relatività generale*, Quaderni del C.N.R. (Genova, 1976).
 - [12] CARMELI M., *Group theory and general relativity*, McGraw Hill (1977).
 - [13] PENROSE R., *Twistor theory, its aims and achievements*, art. In «Quantum Gravity, edit. C. Isham, R. Penrose e D. W. Sciama, Clarendon Press (Oxford, 1975); p. 268.
 - [14] DEMIANSKI M., NEWMAN E. T., Bull Acad. Polon. XIV, 653 (1966).
 - [15] FLAHERTY E. J., *Hermitian and kahlerian geometry in relativity*, Lecture Notes in Physics 46, Springer-Verlag (Berlin, 1976).
 - [16] FERRARIS M., FRANCAVIGLIA M., Atti Acc. Sc. Torino 111, 315 (1976/1977); *An algebraic isometric embedding of Kruskal space-time*, Journ. Gen. Rel. Grav. 10 (4), 283 - 296 (1979); FERRARIS M., *Immersioni algebriche isometriche di soluzioni esatte delle equazioni di Einstein*, in questi Atti.
 - [17] HAWKING S., ELLIS G. F. R., *The large scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, (Cambridge, 1973).
 - [18] HANSEN R., NEWMAN E. T., Journ. Gen. Rel. Grav. 6, 361 (1975);
—PLEBANSKI J. F., Journ Math. Phys. 16, 2395 (1976);
— FINLEY J. D. III, PLEBANSKI J. F., Journ. Math. Phys. 17, 2207 (1976).
 - [19] CURTIS W. D., LERNER D. F., Journ. Math. Phys. 19, 874 (1978).
 - [20] RYAN M., SHEPLEY L., *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton Univ. Press (Princeton, 1975).
 - [21] BIANCHI L., *Lezioni sulla teoria dei gruppi finiti di trasformazioni*, Spoerri (Pisa, 1918); p. 550.
 - [22] BELINSKII V. A., LIFSCHITZ E. M., KHALATNIKOV I. M., Usp. Fiz. Nauk 102, 463 (1970); trad.: Sov. Phys. Uspekhi 100, 745 (1971).
 - [23] JANTZEN R., *A pedestrian guide to the mathematics of spatially homogeneous cosmology*, B. A. Thesis (Princeton, 1974; non pubbl.).
 - [24] BENENTI S., FRANCAVIGLIA M., *The theory of separability of the Hamilton-Jacobi equation and its applications to general relativity*, art. in: «Einstein Jubilaum Volume», edit. A. Held, Plenum Press (N. York, 1979; di pross. pubbl.).
 - [25] PENROSE R., *Techniques of differential topology in relativity*, Reg. Conf. Series in Appl. Math., SIAM (Philadelphia, 1972).
 - [26] FRIEDLANDER F. G., *The wave equation on a curved space-time*, Cambridge Univ. Press, (Cambridge, 1975).
 - [27] WOODHOUSE N. M. J., Ph. D. Thesis (King's College, London, 1973; non pubbl.).
 - [28] WOODHOUSE N. M. J., Comm. Math. Phys. 46, 135 (1976).
 - [29] EVERSON J., TALBOT C. J., Journ. Gen. Rel. Grav. 7, 609 (1976).
 - [30] GEROCH R., *Space-time structure from a global viewpoint*, in Rendiconti S.I.F., Varenna XLVII Corso, edit. R.K. Sachs, Academic Press (N. York, 1971).
 - [31] PENROSE R., *Structure of space-time*, art. in: «Battelles Rencontres 1967», edit. C. De Witt, J. A. Wheeler, Benjamin (N. York, 1968); p. 121.
 - [32] SACHS R. K., WU H., *General relativity for mathematicians*, Springer-Verlag (Berlin, 1977).
 - [33] TAUB A. H., *Fibre bundles over space-time: introductory review*, (preprint, Int. Symp. on Math. Phys., Mexico City, Gen. 1976).
 - [34] DUPONT J., *Curvature and characteristic classes*, Lect. Notes in Math. 640, Springer-Verlag

- (Berlin, 1978).
- [35] LICHNEROWICZ A., *Topics on space-time*, art. in «Battelles Rencontres 1967» (ref. [31]); p. 107.
 - [36] GEROCH R., *Journ. Math. Phys.* 11, 437 (1970).
 - [37] CHOQUET-BRUHAT Y., CHRISTODOULOU D., FRANCAVIGLIA M., *Global estimates for the wave equations in curved space-time; Global existence of harmonic coordinates on asymptotically stationary space-times* (di pross. pubblicazione).
 - [38] LERAY J., *Hyperbolic partial differential equations*, Note mimeografate, Università di Princeton, 1952 (non pubbl.).
 - [39] CHOQUET-BRUHAT Y., *Hyperbolic partial differential equations on a manifold*, art. in «Battelles Rencontres 1967» (ref. [31]); p. 84.
 - [40] CLARKE C. J. S., SCHMIDT B. G., *Singularities: the state of the art*, preprint MPI/PAE Astro n° 79.
 - [41] CURIR A., *Teoria matematica delle singolarità dello spazio tempo*, Tesi di laurea, Università di Torino, 1976 (non pubbl.).
 - [42] GEROCH R., *Singularities*, art. in «Relativity», ed. M. Carmeli, S.I. Fickler, L. Witten, Plenum Press (N. York, 1970); p. 259.
 - [43] TRAUTMAN A., *Comparison of Newtonian and relativistic theories of space-time*, art. in «Perspectives in Geometry and Relativity», ed. B. Hoffman, Indiana Univ. Press (Bloomington, 1966); p. 413.
— TRAUTMAN A., *Rep. Math. Phys.* 1, 29 (1970).
 - [44] TRAUTMAN A., *Infinitesimal connections in physics*, art. in «Symposium on new mathematical methods in physics and problems in general relativity», ed. K. Bleuler, A. Reetz, Bonn, 1973 (note mimeografate, non pubbl.).
 - [45] WEYL H., *Göttinger Nachr.*, 99 (1921).
 - [46] CARTAN E., *Ann. Ec. Norm.* 40, 325 (1923); *Ann. Ec. Norm.* 41, 1 (1924); *Ann. Ec. Norm.* 42, 17 (1925).
 - [47] SCHMIDT B. G., *Journ. Gen. Rel. Grav.* 1, 269 (1971); *Comm. Math. Phys.* 36, 73 (1974).
 - [48] SPARLING G., *Homology and twistor theory*, art. in «Quantum Gravity» (ref. [13]); p. 408.
 - [49] CHOQUET-BRUHAT Y., *Acta Math.* 88, 141 (1952).
 - [50] CHOQUET-BRUHAT Y., *The Cauchy problem*, art. in «Relativity: an introduction to current research», ed. L. Witten, J. Wiley & Sons, (N. York, 1962), p. 130.
 - [51] FISCHER A. E., MARSDEN J., *Comm. Math. Phys.* 28, 1 (1972).
 - [52] HUGES T., KATO T., MARSDEN J., *Arch. Rat. Mech. An.* 63, 273 (1976).
 - [53] CHOQUET-BRUHAT Y., CHRISTODOULOU D., FRANCAVIGLIA M., *Problème de Cauchy sur une variété*, *Compt. Rend. Ac. Sc. Paris A* 470 (1978); (séance du 18 sept. 1978, pagg. 373 - 375), *Cauchy problem on a manifold*, *Ann. Inst. H. Poincaré XXIX*, n° 3, 241 - 255 (1978).
 - [54] FRANCAVIGLIA M., *Applications of infinite dimensional differential geometry to general relativity*, *Riv. Nuovo Cimento I* (7), 1978, pp. 1-54.
 - [55] FISCHER A. E., MARSDEN J., *Lectures on the dynamics of general relativity*, *Rendiconti S.I.F., Varenna 1976, LXVII Corso*, ed. J. Ehlers, North-Holland (Amsterdam, 1979).
 - [56] HANSON A., REGGE T., TEITELBOIM C., *Constrained Hamiltonian systems*, *Accademia dei Lincei* (Roma, 1976).
 - [57] BAIERLEIN R. E., SHARP D. H., WHEELER J. A., *Phys. Rev.* 126, 1864 (1962).
— WHEELER J. A., *Superspace and the nature of quantum geometrodynamics*, art. in «Battelles Rencontres 1967» (ref. [31]); p. 242.
 - [58] FISCHER A. E., *The theory of superspace*, art. in «Relativity» (ref. [42]); p. 303.
 - [59] FISCHER A. E., MARSDEN J., *Journ. Math. Phys.* 13, 546 (1972).

- [60] MARSDEN J., *Applications of global analysis in mathematical physics*, Publish or Perish (Boston, 1974).
- [61] MARSDEN J., WEINSTEIN A., Rep. Math. Phys. 5, 121 (1974).
- [62] NEVANLINNA R., *Interaction between physics and mathematics*, in ref. [44].



DIONIGI GALLETTTO

SUI FONDAMENTI DELLA MECCANICA CLASSICA,
DELLA TEORIA NEWTONIANA DELLA GRAVITAZIONE
E DELLA COSMOLOGIA NEWTONIANA (*)

*A Clifford Truesdell
in occasione del suo sessantesimo compleanno
e a ricordo di quindici anni di amicizia*

1. Introduzione.

Nella formulazione classica della meccanica newtoniana viene postulata l'esistenza di un riferimento assoluto, fisso e fisicamente reperibile, rispetto al quale viene enunciata la legge fondamentale della dinamica che lega le forze alle accelerazioni.

Accanto a detto riferimento assoluto si considerano poi i riferimenti inerziali, riferimenti in moto traslatorio uniforme rispetto al riferimento assoluto e quindi l'uno rispetto all'altro, nel confronto dei quali le leggi differenziali del moto, quali si ottengono dalla legge fondamentale, si mantengono invarianti, nel senso che conservano immutata la loro espressione nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro, espressione che è quella assunta nel riferimento assoluto.

E' ben noto che il concetto di riferimento assoluto fisicamente reperibile è un'astrazione che, se in passato poteva trovare fondamento nella convinzione che le stelle fossero fisse, oggi non può trovare più alcun riscontro nella realtà (1), specialmente da quando si è scoperto che l'Universo, contrariamente ad un'opinione profondamente radicata in passato, lungi dall'essere su larga scala statico, risulta in espansione. Né, *a priori*, alcun fondamento nella realtà può conseguentemente trovare il concetto di riferimento inerziale.

Nella presente esposizione viene sviluppata una teoria dei riferimenti fisici che,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

(1) Almeno fino a quando non sopravvengano fatti nuovi, i quali possono essere forniti unicamente dagli studi e dalle scoperte nell'ambito dell'astronomia extragalattica, studi e scoperte essenzialmente collegati alla radiazione di fondo (ad es. una sua eventuale anisotropia).

a differenza di quanto accade per i riferimenti inerziali i quali costituiscono una pura astrazione che, al pari del riferimento assoluto, non ha riscontro nella realtà fisica, tiene conto delle indicazioni che vengono fornite dall'esperienza. Essendo i riferimenti fisici individuati da corpi che tra loro si attraggono, è evidente che la suddetta teoria risulta necessariamente e strettamente connessa alla teoria della gravitazione.

L'osservazione astronomica indica che su larga scala l'Universo si presenta omogeneo e che, risultando trascurabili i movimenti irregolari delle galassie rispetto al movimento d'insieme dell'Universo, il suo comportamento risulta isotropo, intendendosi con ciò dire che le generiche galassie si allontanano dalla nostra con velocità puramente radiali. In realtà l'osservazione indica molto di più, e cioè che la velocità di fuga di ogni generica galassia risulta proporzionale alla sua distanza dalla nostra galassia (legge di Hubble (2), 1929).

Una tale situazione per l'Universo permette di introdurre un riferimento fisico $\mathcal{C}_O$, individuato da una terna di assi avente origine nel baricentro O della nostra galassia e gli assi diretti verso tre galassie lontane, non complanari con la nostra, e, assumendo come schema per l'Universo quello della materia disgregata, di descriverlo mediante un fluido (il «fluido cosmologico» dei cosmologi) — che nel seguito verrà indicato con $\mathcal{U}$ — omogeneo e per il quale siano del tutto trascurabili gli sforzi interni, fluido che verrà ritenuto esteso a tutto lo spazio, che si supporrà euclideo.

E' al riferimento $\mathcal{C}_O$ (riferimento fisicamente «accessibile» su larga scala) che in definitiva si possono ricondurre le osservazioni, misure ed esperimenti ed è rispetto ad esso che risulta verificata la legge fondamentale della dinamica nel suo usuale enunciato.

Il ritenere valida la suddetta legge rispetto al riferimento $\mathcal{C}_O$ implica supporre che il moto rispetto a $\mathcal{C}_O$ di ogni elemento P di $\mathcal{U}$ sia regolato unicamente dalle forze a distanza esercitate su esso dagli altri elementi di $\mathcal{U}$. Da tale fatto e dalla circostanza che dalle ipotesi che $\mathcal{U}$ sia omogeneo ed abbia comportamento isotropo rispetto a $\mathcal{C}_O$ segua necessariamente, con considerazioni puramente cinematiche, la legge di Hubble, si deducono l'espressione esplicita dell'equazione che regola il moto di P — e, di conseguenza, l'equazione che regola l'intero processo di espansione di $\mathcal{U}$ — nonché i risultati seguenti, qui brevemente riassunti.

Le ipotesi fatte su $\mathcal{U}$ implicano che la forza a distanza (forza gravitazionale) che si esercita fra due elementi qualsiasi di $\mathcal{U}$ sia necessariamente espressa dalla legge di gravitazione universale.

Chiamati naturali i riferimenti aventi l'origine negli elementi di $\mathcal{U}$ e in moto

(2) Cfr. [13].

traslatorio rispetto a $\mathcal{C}_O$, rispetto ad ogni riferimento naturale $\mathcal{C}_{O'}$, il risultante delle forze specifiche che agiscono su P è dato dal risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate dagli elementi della sfera $\mathcal{S}_{O'P}$ avente origine in O' e raggio $|O'P|$.

Il fluido $\mathcal{U}$ ha pertanto lo stesso comportamento, sia cinematico che dinamico, rispetto a tutti i riferimenti naturali, ivi compreso il riferimento $\mathcal{C}_O$, ossia tutti i riferimenti naturali sono tra loro equivalenti. Il riferimento naturale $\mathcal{C}_O$ viene così a perdere quel carattere di riferimento privilegiato che inizialmente gli era stato attribuito.

Si può poi parlare, invece che di risultante della forza specifica di trascinamento e delle forze gravitazionali specifiche, di risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate da $\mathcal{U}$ su P , valutato nel riferimento naturale $\mathcal{C}_O$, rispetto al quale si considera il moto di P , dato dal risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate su P dalla sfera materiale $\mathcal{S}_{O'P}$. Per P la legge fondamentale della dinamica si enuncia quindi: qualunque sia il riferimento naturale $\mathcal{C}_{O'}$, l'accelerazione di P rispetto a $\mathcal{C}_{O'}$ è uguale al risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate da $\mathcal{U}$ su P , valutato in $\mathcal{C}_{O'}$.

In analogia a quanto accade in relatività generale, i suddetti risultati pongono in piena luce l'aspetto inscindibile che in realtà la meccanica newtoniana presenta con la teoria newtoniana della gravitazione, come emerge in particolare dal fatto che dalle ipotesi fatte su $\mathcal{U}$ discenda, nel senso sopra precisato, la legge di gravitazione universale.

Inoltre la teoria qui sviluppata, permettendo di affermare che a determinare il moto di P rispetto al riferimento naturale $\mathcal{C}_O$, contribuisce soltanto la parte di $\mathcal{U}$ contenuta in $\mathcal{S}_{O'P}$, esclude che la materia «lontana» possa influenzare il moto di quella «vicina».

Alcune brevi e generiche tracce che possono costituire i primi elementi per una teoria dei riferimenti analoga a quella qui sviluppata sono stati dati in [23]. Elementi per una teoria più generale di quella dei riferimenti naturali, che però, a differenza di quella qui presentata, prescinde dal moto di $\mathcal{U}$, sono stati dati in [11] e [12], dove però l'interesse degli Autori è pressoché interamente rivolto all'analisi dei possibili moti di $\mathcal{U}$. A fondamento di dette esposizioni viene comunque sempre posta la teoria newtoniana della gravitazione.

La presente esposizione costituisce una rielaborazione e sistemazione organica di quanto è stato esposto in varie riprese in [10], [4], [9], [8], ecc. (3). In essa si accenna anche alle sue implicazioni cosmologiche e ai contributi che sono stati dati sino ad oggi alla cosmologia trattata in termini newtoniani.

(3) In particolare nella presente esposizione si è provveduto ad eliminare alcune imprecisioni contenute nei suddetti lavori, rimuovendone anche certi aspetti non soddisfacenti.

2. Comportamento cinematico del fluido $\mathcal{U}$.

Conformemente a quanto detto al § 1, si supponga che esista un elemento O di $\mathcal{U}$ ed un riferimento, con origine in O , rispetto al quale $\mathcal{U}$ abbia *comportamento isotropo* (ossia che rispetto a detto riferimento, che, conformemente alle notazioni introdotte, verrà indicato con $\mathcal{C}_O$, la velocità di ogni elemento di $\mathcal{U}$ risulti puramente radiale). Un siffatto riferimento verrà chiamato *naturale*.

L'ipotesi che $\mathcal{U}$ sia omogeneo implica che la sua densità μ sia funzione unicamente del tempo. Pertanto, posto

$$(2.1) \quad h(t) = -\frac{1}{3} \frac{\dot{\mu}}{\mu},$$

con $\dot{\mu} = d\mu/dt$, e indicato con P un qualunque elemento di $\mathcal{U}$ e con r la sua distanza da O , dall'equazione di continuità, tenendo presente che $\mathcal{U}$ ha comportamento isotropo rispetto a $\mathcal{C}_O$, si ottiene ⁽⁴⁾

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \dot{r}) = 3hr^2.$$

Da questa segue immediatamente

$$(2.2) \quad \dot{r} = h(t) r + \frac{f(t)}{r^2},$$

con la funzione $f(t)$ che, come ora si vedrà, non può essere che identicamente nulla.

Sia infatti V la regione dello spazio solidale al riferimento $\mathcal{C}_O$ delimitata dalla superficie sferica Σ avente centro in O e raggio uguale al valore assunto da r nell'istante attuale t . Il decremento di massa, inteso in senso algebrico ⁽⁵⁾, che ha luogo in V nell'unità di tempo è dato, tenendo presente (2.2) e (2.1), da

⁽⁴⁾ Scelta una terna di assi cartesiani ortogonali con origine in O e solidale al riferimento $\mathcal{C}_O$, risulta infatti

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\dot{r} \frac{x^i}{r} \right) = \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} + 2 \frac{\dot{r}}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \dot{r}),$$

ecc.

⁽⁵⁾ Con ciò si intende dire che detto decremento è positivo o negativo a seconda che si abbia una diminuzione o un aumento della massa contenuta in V .

$$\int_{\Sigma} \mu \left(hr + \frac{f}{r^2} \right) d\Sigma = -\frac{4}{3} \pi r^3 \dot{\mu} + 4\pi \mu f.$$

D'altra parte la suddetta quantità di materia è pure espressa da

$$-\int_V \dot{\mu} dV = -\frac{4}{3} \pi r^3 \dot{\mu},$$

eguaglianza che, confrontata con la precedente, implica $f(t) \equiv 0$.

Si può quindi affermare che:

I. Dalle ipotesi che $\mathcal{U}$ sia omogeneo e abbia comportamento isotropo rispetto al riferimento $\mathcal{C}_O$ segue che la velocità rispetto a $\mathcal{C}_O$ di ogni elemento P di $\mathcal{U}$ risulta espressa da ⁽⁶⁾

$$(2.3) \quad \frac{dOP}{dt} = h(t) OP.$$

Sia ora O' un qualunque altro elemento di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{C}_{O'}$ il riferimento con l'origine in O' e in moto traslatorio rispetto a $\mathcal{C}_O$. Ricordando (2.3), da $O'P = OP - OO'$ segue

$$(2.3') \quad \frac{dO'P}{dt} = h(t) O'P$$

e si ha pertanto:

II. Tutti i riferimenti con origine negli elementi di $\mathcal{U}$ e in moto traslatorio rispetto a $\mathcal{C}_O$ risultano naturali, nel senso che rispetto a ognuno di essi $\mathcal{U}$ ha comportamento isotropo. La legge espressa da (2.3) risulta verificata non solo rispetto al riferimento naturale $\mathcal{C}_O$ ma anche rispetto a ogni altro riferimento naturale.

(6) E' il caso di osservare che la legge (2.3) necessariamente implica che la funzione $h(t)$ abbia l'espressione (2.1). Infatti, come conseguenza di (2.3), la superficie sferica avente per centro O e raggio $r = |OP|$ risulta una superficie materiale e perciò si ha: $4/3 \pi \mu r^3 = \text{cost}$. Da questa, derivando, si ottiene

$$\dot{r} = -\frac{1}{3} \frac{\dot{\mu}}{\mu} r,$$

la quale, confrontata con (2.3), implica che la funzione $h(t)$ sia espressa da (2.1).

Da (2.3) si deduce poi

$$(2.4) \quad \frac{d^2 OP}{dt^2} = (\dot{h} + h^2)OP$$

e si ha, come subito segue da (2.3'):

$$(2.4') \quad \frac{d^2 O'P}{dt^2} = (\dot{h} + h^2)O'P,$$

ossia:

III. *La legge espressa da (2.4) risulta verificata non solo rispetto al riferimento naturale $\mathcal{C}_O$ ma anche rispetto a ogni altro riferimento naturale.*

Si può pertanto concludere che:

IV. *Il fluido $\mathcal{U}$ ha lo stesso comportamento cinematico, espresso dalle leggi (2.3'), (2.4'), rispetto a tutti i riferimenti naturali.*

3. La legge fondamentale della dinamica per il fluido $\mathcal{U}$ e sue conseguenze.

Come già detto nel §1, è rispetto al riferimento naturale $\mathcal{C}_O$ considerato sino ad ora e dal quale si esamina il comportamento di $\mathcal{U}$, che va enunciata, ritenendola valida rispetto ad esso, la *legge fondamentale della dinamica* relativa ad un punto materiale che si muova all'interno del fluido $\mathcal{U}$:

Il risultante delle forze effettive agenti su un punto materiale è uguale al prodotto della massa del punto per la sua accelerazione rispetto al riferimento $\mathcal{C}_O$.

A detta legge è strettamente connesso il *principio del parallelogrammo delle accelerazioni*, ossia il *principio di sovrapposizione delle forze simultanee* (7).

Il ritenere valida la legge fondamentale della dinamica rispetto al riferimento $\mathcal{C}_O$, così come è stata enunciata, implica supporre che il moto rispetto a $\mathcal{C}_O$ degli elementi del fluido $\mathcal{U}$, tenendo presente le ipotesi che si sono su questo fatte, sia regolato unicamente dalla distribuzione nello spazio della materia costituente $\mathcal{U}$, ossia implica supporre che il moto di ogni elemento P di $\mathcal{U}$ sia regolato unicamente dalle forze a distanza esercitate su esso dagli altri elementi di $\mathcal{U}$.

Pertanto, indicato con $g(OP, t)$ il risultante delle forze specifiche (8) a distanza esercitate su P dagli altri elementi di $\mathcal{U}$ e ricordando (2.4), dall'equazione in cui

(7) Cfr., ad es., [26], Cap. X, nn. 5, 9.

(8) Forze riferite all'unità di massa.

si traduce la legge fondamentale della dinamica riferita all'unità di massa segue

$$(3.1) \quad g(OP, t) = (\dot{h} + h^2)OP.$$

Detta eguaglianza esprime che il risultante $g(OP, t)$ risulta uguale al prodotto del vettore OP per una funzione scalare, che si può considerare come funzione di μ . Infatti in tutto l'intervallo di tempo (eventualmente infinito) in cui $h(t)$ è di segno costante (ad esempio positivo: caso in cui $\mathcal{U}$ si espande) μ risulta funzione monotona di t in senso stretto e quindi funzione invertibile di t , che si può pertanto esprimere in detto intervallo in funzione di μ . In detto intervallo si può pertanto scrivere:

$$(3.2) \quad g(OP, t(\mu)) = F(\mu) OP,$$

con la funzione $F(\mu)$ continua non appena si ritenga continua, come è implicito nelle considerazioni fino ad ora svolte, la funzione $\dot{h} + h^2$. La suddetta considerazione potendosi ripetere per ogni intervallo in cui h è di segno costante ⁽⁹⁾, l'eguaglianza (3.2) sussiste, con $F(\mu)$ continua, in tutto l'intervallo corrispondente all'intervallo in cui la funzione $\dot{h} + h^2$, intesa ovviamente come funzione di t , è continua.

Indicata con a l'accelerazione in senso *euleriano* ⁽¹⁰⁾, da (3.2) e dalla legge fondamentale della dinamica segue quindi

$$(3.3) \quad a = F(\mu) OP,$$

con la funzione $F(\mu)$ negativa stante il carattere attrattivo delle forze a distanza.

Interpretando questa eguaglianza in senso euleriano e posto

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (\mu_i > 0),$$

con l'intero n arbitrario, il principio di sovrapposizione delle forze simultanee ⁽¹¹⁾ implica

⁽⁹⁾ E' ovvio che il numero di detti intervalli è superiore a uno se e solo se $\mathcal{U}$ non si espande indefinitamente.

⁽¹⁰⁾ Cfr., ad es., [26], Cap. XVIII, n. 2.

⁽¹¹⁾ E' il caso di osservare che, con le medesime considerazioni svolte sopra, si sarebbe potuto pervenire all'eguaglianza (3.3) partendo, invece che da (3.2), da (2.4), ossia senza far ricorso alla legge fondamentale della dinamica. Così procedendo non sarebbe stato però possibile assegnare al secondo membro di (3.3) il significato di una forza (come invece il modo di procedere seguito permette), con l'impossibilità quindi di poter applicare il principio di sovrapposizione delle forze simultanee.

$$F(\mu) \equiv F\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right) = \sum_{i=1}^n F(\mu_i),$$

da cui segue agevolmente (12), stante la supposta continuità di $F(\mu)$:

$$F(\mu) = -\kappa\mu,$$

con κ costante che, stante il carattere attrattivo delle forze a distanza, non può che essere positiva.

Sostituendo l'eguaglianza ora ottenuta in (3.3), che sussiste ad ogni istante per ogni P , e pòsto

$$k = \frac{3\kappa}{4\pi},$$

oppure sostituendo direttamente detta eguaglianza in (2.4), si ottiene

$$(3.4) \quad \frac{d^2 OP}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi k \mu OP,$$

ossia:

V. Dalle ipotesi fatte su $\mathcal{U}$ segue l'equazione esplicita del moto di P rispetto al riferimento naturale $\mathcal{C}_O$, senza far ricorso alla teoria newtoniana della gravitazione.

(12) Supposto $\mu = n/m$, con m intero, da

$$F\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right) = \sum_{i=1}^n F(\mu_i)$$

segue

$$(a) \quad F\left(\frac{n}{m}\right) = nF\left(\frac{1}{m}\right) \equiv \frac{n}{m} mF\left(\frac{1}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right) F(1).$$

Supposto poi $\mu = \alpha$ con α irrazionale e ricordando che $F(\mu)$ è continua, si consideri una successione convergente di numeri razionali β_i ($i = 1, 2, \dots$) avente come limite α . Ricordando (a), risulta

$$F(\alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} F(\beta_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i F(1) = \alpha F(1).$$

Si ha quindi, qualunque sia μ nell'intervallo in cui $F(\mu)$ è definita:

$$F(\mu) = \mu F(1),$$

da cui segue

$$\kappa = -F(1).$$

Detta equazione coincide con l'equazione che, nella formulazione solita della meccanica, si sarebbe ottenuta ritenendo il riferimento $\mathcal{C}_O$ inerziale, nullo il risultante delle forze specifiche a distanza esercitate su P dalla parte di $\mathcal{U}$ esterna alla sfera materiale $\mathcal{S}_{OP}$ di centro O e raggio $|OP|$ e le forze a distanza espresse dalla legge di gravitazione universale (con k costante di gravitazione universale). Nulla però autorizza, almeno sino a questo punto, tale modo di procedere, che è usualmente seguito nelle trattazioni di cosmologia fatte in termini newtoniani ⁽¹³⁾. La suddetta equazione viene invece qui ottenuta ricorrendo unicamente alle ipotesi fatte su $\mathcal{U}$ e ritenendo valida la legge fondamentale della dinamica rispetto al riferimento $\mathcal{C}_O$ dal quale si esamina il comportamento di $\mathcal{U}$. Detto riferimento viene così ad assumere, per il momento, un ruolo identificabile con quello che ha un riferimento inerziale (anzi addirittura il riferimento assoluto) nella formulazione usuale della meccanica, ma le considerazioni che verranno svolte al § 7 eliminano questo carattere di riferimento privilegiato che per ora, fra tutti i riferimenti naturali, viene assunto da $\mathcal{C}_O$ ⁽¹⁴⁾.

Indicata poi con $\phi(r)$ una qualsiasi funzione il cui gradiente risulti uguale al secondo membro di (3.4), si ha che ϕ soddisfa all'equazione di Poisson:

$$\Delta\phi = -4\pi k\mu.$$

E' infine il caso di osservare esplicitamente che il modo di procedere seguito per dedurre l'equazione (3.4) presuppone l'identificazione della massa inerziale con la massa gravitazionale passiva (si veda il n. 3 dell'Appendice I) e, conseguentemente, con la massa gravitazionale attiva (si vedano i nn. 1, 2, 3 di detta Appendice). L'equivalenza fra la massa gravitazionale e la massa inerziale sta all'origine di tutti i risultati che verranno esposti nei § § 7 e 8.

4. Prime osservazioni sul comportamento dinamico del fluido $\mathcal{U}$.

Da (2.4), (3.4) segue

$$(4.1) \quad \dot{h} + h^2 = -\frac{4}{3}\pi k\mu$$

e, ricordando la posizione (2.1), si ottiene

⁽¹³⁾ Si veda in proposito il § 13.

⁽¹⁴⁾ Naturalmente unicamente dal punto di vista dinamico, perché dal punto di vista cinematico l'equivalenza fra tutti i riferimenti naturali è stata ampiamente messa in evidenza nel § 2.

$$(4.2) \quad h = \sqrt{\frac{8}{3} \pi k \mu + a \mu^{2/3}},$$

con a costante di integrazione e dove, ritenendo $\mathcal{U}$ in espansione, si è scelta la determinazione positiva della radice quadrata. L'espressione (4.2) fornisce la legge secondo cui varia h al variare di μ . Da essa si deduce che per $a \geq 0$ ⁽¹⁵⁾ $\mathcal{U}$ si espande indefinitamente, mentre per $a < 0$ si espande fino all'istante in cui μ assume il valore

$$\mu = - \left(\frac{3a}{8\pi k} \right)^3,$$

in corrispondenza al quale cessa il processo di espansione e dopodiché $\mathcal{U}$ inizia a contrarsi. In questa seconda fase h risulta espresso da (4.2) con la determinazione negativa della radice quadrata.

Tenendo ancora una volta presente (2.1), un'ulteriore integrazione permette di dedurre da (4.2) t in funzione di μ , ecc.

5. Conseguenze dell'equazione del moto di P .

Indicata con $\mathcal{M}$ la massa della parte di $\mathcal{U}$ contenuta nella sfera $\mathcal{S}_{OP}$, l'equazione (3.4) si può scrivere

$$(5.1) \quad \frac{d^2 OP}{dt^2} = -k \frac{\mathcal{M}}{|OP|^2} \frac{OP}{|OP|},$$

risultato che si identificherebbe con uno ben noto della teoria newtoniana della gravitazione qualora si potesse asserire che è nullo il risultante delle forze specifiche a distanza esercitate sull'elemento P dalla parte di $\mathcal{U}$ esterna alla sfera materiale $\mathcal{S}_{OP}$ e che dette forze sono espresse dalla legge di gravitazione universale.

In effetti nell'equazione (5.1), che si mantiene immutata comunque si scelga P sulla frontiera di $\mathcal{S}_{OP}$, intervengono soltanto i termini caratteristici della sfera materiale $\mathcal{S}_{OP}$, e precisamente la sua massa $\mathcal{M}$ e il suo raggio $|OP|$, ossia non interviene nessun termine relativo alla parte di $\mathcal{U}$ esterna a $\mathcal{S}_{OP}$. Tutto lascia quindi presumere che la parte di $\mathcal{U}$ esterna a $\mathcal{S}_{OP}$ non dia alcun contributo al moto di P e che quindi a determinare detto moto, ossia a determinare il risultante $g(OP, t)$ delle forze specifiche a distanza esercitate dagli elementi Q di $\mathcal{U}$ su P , contribuisca soltanto la parte di $\mathcal{U}$ contenuta nella sfera $\mathcal{S}_{OP}$.

⁽¹⁵⁾ Il valore della costante a si determina sostituendo in (4.2) i valori attuali di h e μ .

In base all'eguaglianza (I.14) dell'Appendice I, l'espressione di $g(OP, t)$ risulterebbe pertanto data da

$$(5.2) \quad g(OP, t) = \mu(t) \int_{\mathcal{S}_{OP}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C},$$

dove $f(|PQ|)$ è la grandezza della forza che si esercita fra i due elementi P e Q , divisa per le rispettive masse.

Da (5.2), tenendo presente (3.1) e (4.1), seguirebbe quindi

$$\int_{\mathcal{S}_{OP}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = -\frac{4}{3} \pi k OP,$$

comunque si selga P in $\mathcal{U}$ (16).

Sarebbe pertanto sufficiente a questo punto ricordare il teorema dimostrato nell'Appendice II per concludere che la funzione $f(|PQ|)$ risulterebbe espressa da

$$(5.3) \quad f(|PQ|) = \frac{k}{|PQ|^2}.$$

In altri termini la forza a distanza che si esercita fra due elementi qualsiasi di $\mathcal{U}$ risulterebbe espressa dalla legge di gravitazione universale (con k costante di gravitazione universale).

Si può quindi affermare che tutto accade come se a determinare il risultante $g(OP, t)$ delle forze specifiche a distanza esercitate dagli elementi di $\mathcal{U}$ su P contribuisse soltanto la parte di $\mathcal{U}$ contenuta nella sfera $\mathcal{S}_{OP}$ e, conseguentemente, la forza a distanza che si esercita tra ogni coppia di elementi di $\mathcal{U}$ fosse espressa dalla legge di gravitazione universale:

Tutto ciò trova conferma nelle considerazioni che verranno svolte nel §6.

6. Il fluido $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio come caso limite.

Allo scopo di fornire la conferma che a determinare $g(OP, t)$ contribuisce soltanto la parte di $\mathcal{U}$ contenuta nella sfera $\mathcal{S}_{OP}$, si osservi che il risultante $g(OP, t)$ delle forze specifiche a distanza esercitate su P dagli altri elementi di $\mathcal{U}$ si può esprimere tramite l'eguaglianza (I.14) dell'Appendice I, con il campo di

(16) Stante il carattere attrattivo delle forze a distanza, da (5.2) segue in modo esplicito che deve essere $k > 0$.

integrazione esteso a tutto lo spazio euclideo $\mathcal{R}^3$:

$$(6.1) \quad g(OP, t) = \mu(t) \int_{\mathcal{R}^3} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C}.$$

Al riguardo va però subito detto che l'integrale generalizzato che compare in (6.1) così come è scritto appare indeterminato, ed è questa indeterminazione che ha generato in passato l'erronea convinzione, risalente a C. Neumann e da C. Neumann in poi sistematicamente ripresa ⁽¹⁷⁾, che un universo infinito ed omogeneo sia in conflitto con la legge di gravitazione universale. Occorre però osservare che nel presente caso per detto integrale deve sussistere l'eguaglianza (6.1), dove il primo membro è perfettamente determinato e precisamente espresso, secondo quanto indica la legge fondamentale della dinamica, da (3.1). In altri termini il suddetto integrale, almeno nel senso che verrà più avanti precisato, deve risultare convergente verso $(\dot{h} + h^2)OP$, che a sua volta, come si è visto, esprime l'accelerazione di P rispetto al riferimento $\mathcal{T}_O$. Si può quindi intanto affermare che è con riferimento a $\mathcal{T}_O$ — o meglio con riferimento al punto O — che detto integrale va considerato ⁽¹⁸⁾.

Quanto ora visto non è comunque sufficiente per affermare che il suddetto integrale sia assolutamente convergente, nel senso che, considerata ad esempio una successione di domini $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n, \dots$ fra loro omotetici con polo di omotetia in O e che al crescere di n si estendano a tutto $\mathcal{R}^3$, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_n} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C}$$

può non esistere o essere infinito, oppure, se esiste ed è finito, può dipendere dalla successione considerata.

Pertanto, allo scopo di ulteriormente precisare che cosa si debba intendere con l'integrale che compare in (6.1) e contemporaneamente ottenere indicazioni sull'eventuale scelta di un'opportuna successione di domini che si estenda a tutto $\mathcal{R}^3$, mediante la quale definire come limite il suddetto integrale, si indichi con $\mathcal{C}_O$ un arbitrario dominio di $\mathcal{R}^3$ contenente O all'interno e si indichi con $\mathcal{C}$ il

⁽¹⁷⁾ Cfr., ad es., [16], 87, 89. Per maggiori dettagli di carattere storico e critico si veda il § 13 della presente esposizione.

⁽¹⁸⁾ La necessità di considerare detto integrale con riferimento ad un assegnato punto si può constatare con l'esempio considerato in [16], 89, esempio in cui la funzione $f(|PQ|)$ è data da $1/|PQ|^2$.

generico dominio omotetico a $\mathcal{C}_O$ con polo di omotetia in O . Inoltre, si supponga per il momento che $\mathcal{U}$, lasciando immutate le altre ipotesi su esso fatte, sia limitato e che $\mathcal{C}_O$ sia la configurazione da esso assunta a un dato istante, ritenendo però che la funzione $f(|PQ|)$, stante il suo significato fisico ricordato al §5 e conformemente a quanto precisato al n. 1 dell'Appendice I, resti immutata, cioè che sia la medesima che compare in (6.1). Allo scopo di evitare inutili complicazioni espositive, si ritenga poi che la densità $\mu(t)$ di $\mathcal{U}$, come si preciserà più avanti (19), sia così bassa da permettere ad $\mathcal{U}$ di espandersi indefinitamente.

Tenendo presente che le deduzioni contenute nel §2 sono indipendenti dall'ipotesi che $\mathcal{U}$ si estenda a tutto lo spazio e che pertanto permangono sostanzialmente immutate, si ha che anche nel presente caso l'espansione è descritta dalla legge (2.3), esprimente che le configurazioni $\mathcal{C}$ assunte da $\mathcal{U}$ al variare del tempo sono omotetiche a $\mathcal{C}_O$ con polo in O .

Ricordando l'eguaglianza (I.14) dell'Appendice I, il risultante $g(OP, t)$ risulta ora espresso, oltre che da (3.1), da

$$g(OP, t) = \mu(t) \int_{\mathcal{C}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C},$$

e, stante (3.1), risulta quindi, per ogni $\mathcal{C}$ omotetico a $\mathcal{C}_O$ con polo in O e per ogni $P \in \mathcal{C}$:

$$(6.2) \quad \int_{\mathcal{C}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = -\lambda OP,$$

dove si è posto

$$(6.3) \quad \lambda = - \frac{\dot{h} + h^2}{\mu}.$$

Però, a differenza del caso di $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio, caso in cui il suddetto rapporto è costante, nel presente caso, variando $\mathcal{C}$ al variare del tempo, non è possibile escludere, almeno per il momento, una possibile dipendenza di λ da t . Si può però osservare che, essendo per le ipotesi fatte h di segno costante (positivo), t risulta in corrispondenza biunivoca con la misura $|\mathcal{C}|$ di $\mathcal{C}$. In altri termini, non si può escludere che risulti $\lambda = \lambda(|\mathcal{C}|)$, come d'altronde indica la stessa eguaglianza (6.2), la quale ha il primo membro che non dipende esplicitamente

(19) Si veda la nota n. 22.

da t ⁽²⁰⁾. Si ha pertanto, per ogni $\mathcal{C}$ omotetico a $\mathcal{C}_O$ con polo in O e per ogni $P \in \mathcal{C}$:

$$(6.4) \quad \int_{\mathcal{C}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = -\lambda(|\mathcal{C}|)OP.$$

Occorre inoltre osservare che, pur avendo ritenuto $f(|PQ|)$ indipendente da $\mathcal{C}$, non è da escludere che il valore dell'integrale che compare in (6.4), e quindi la funzione $\lambda(|\mathcal{C}|)$, dipenda, oltre che da $|\mathcal{C}|$, dalla scelta del dominio $\mathcal{C}_O$.

Avendo introdotto unicamente l'ipotesi che $\mathcal{U}$ sia limitato, oltre naturalmente a quella che la funzione $f(|PQ|)$ sia indipendente da $\mathcal{C}$, si ha che l'eguaglianza (6.4) deve sussistere in corrispondenza ad ogni possibile scelta di $\mathcal{C}_O$ con O interno — in particolare con $\mathcal{C}_O$ sferico con centro in O — con la funzione $\lambda(|\mathcal{C}|)$ che è la medesima in corrispondenza a tutti i domini $\mathcal{C}$ omotetici a $\mathcal{C}_O$ con polo in O .

Ritenendo che $f(|PQ|)$ soddisfi a opportune ipotesi di regolarità, è a questo punto sufficiente ricordare il teorema B dell'Appendice III per dedurre che O coincide con il baricentro dei suddetti domini e che risulta

$$(6.5) \quad f(|PQ|) = \beta |PQ|, \quad \lambda(|\mathcal{C}|) = \beta |\mathcal{C}|,$$

con la costante β soggetta all'unica condizione di essere positiva, essendo positiva la funzione $f(|PQ|)$.

Si ha pertanto che il ritenere che λ sia una funzione effettiva di $|\mathcal{C}|$ implica che la funzione $f(|PQ|)$ sia espressa da (6.5). Ma detta espressione è fisicamente inammissibile in quanto, in evidente contrasto con l'esperienza, esprimerebbe che le forze a distanza crescono in intensità con la distanza stessa, tendendo addirittura ad infinito se, come si è supposto, $\mathcal{U}$ si espande indefinitamente. Che detta espressione per $f(|PQ|)$ debba essere esclusa segue anche dal fatto che, qualunque sia la successione di domini $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n, \dots$ che al crescere di n si estendono a tutto lo spazio, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathcal{C}_n} PQ d\mathcal{C} \right| = \infty,$$

il che è in ovvio contrasto con l'eguaglianza (6.1).

⁽²⁰⁾ E' il caso di osservare che alla stessa conclusione porta nel presente caso il modo di procedere seguito al §3 per dedurre l'equazione (3.4). Non si può cioè escludere che il fattore κ , che, stante la posizione (6.3), si identifica ora con λ , dipenda da $|\mathcal{C}|$.

Occorre quindi escludere che λ sia una funzione effettiva di $|\mathcal{C}|$, ossia occorre ritenere che λ sia costante. Poiché la classe dei domini $\mathcal{C}_O$ include i domini sferici di centro O , è sufficiente ricordare il corollario C dell'Appendice III per ottenere che la funzione $f(|PQ|)$ è necessariamente espressa da

$$(6.6) \quad f(|PQ|) = \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda}{|PQ|^2}$$

e che gli unici domini compatibili con detta espressione per $f(|PQ|)$ sono i domini sferici $\mathcal{S}$ di centro O .

Si può pertanto affermare che l'unico caso che si può presentare per $\mathcal{U}$ limitato è quello in cui le configurazioni da esso assunte sono le configurazioni sferiche $\mathcal{S}$ di centro O , risultato che sussiste qualunque sia la densità $\mu(t)$ di $\mathcal{U}$.

Inoltre, comunque scelto P interno a $\mathcal{S}$ e comunque scelto $\mathcal{S}$ con centro in O , risulta, con l'espressione di $f(|PQ|)$ data da (6.6):

$$(6.7) \quad \int_{\mathcal{S}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{S}_{OP}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = -\lambda OP,$$

e pertanto il risultante $\mathbf{g}(OP, t)$ delle forze specifiche a distanza esercitate da $\mathcal{U}$ su P risulta sempre espresso da

$$(6.8) \quad \mathbf{g}(OP, t) = \mu(t) \int_{\mathcal{S}_{OP}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C}$$

qualunque sia il raggio di $\mathcal{S}$, ossia è *indipendente* da detto raggio. L'eguaglianza (6.8) si mantiene pertanto valida, qualunque sia $\mu(t)$, anche nel caso limite in cui si faccia tendere ad infinito tale raggio, che equivale al caso in cui $\mathcal{U}$ si estende a tutto lo spazio ⁽²¹⁾. E' pertanto in questo senso che si può parlare del caso in cui $\mathcal{U}$ si estenda a tutto lo spazio come caso limite del caso in cui sia limitato ed è pertanto in tal senso che va interpretato l'integrale che compare in (6.1). Risulta cioè

$$\int_{\mathcal{R}^3} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = \lim_{\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}^3} \int_{\mathcal{S}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C},$$

eguaglianza che dà pieno significato all'integrale che compare in (6.1).

(21) L'eguaglianza (6.8) viene quindi in tal caso a identificarsi con (5.2).

Ricordando (6.7), si ha pertanto, come d'altronde ormai subito segue da (6.1), (6.8):

$$\int_{\mathcal{R}^3} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{S}_{OP}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = -\lambda OP,$$

eguaglianza che, tenendo presenti (3.1) e (4.1), oltre che (6.1), implica tra l'altro che sia $\lambda = 4\pi k/3$, ossia $\lambda = \kappa$ (22).

Si può quindi affermare che effettivamente risulta:

VI. *A determinare il risultante $g(OP, t)$ delle forze specifiche a distanza esercitate dagli elementi Q di $\mathcal{U}$ su P contribuisce soltanto la parte di $\mathcal{U}$ contenuta nella sfera $\mathcal{S}_{OP}$.*

Stante quanto visto al §5, sussiste quindi (5.3), ossia:

VII. *Le ipotesi che $\mathcal{U}$ sia omogeneo e abbia comportamento isotropo rispetto al riferimento naturale $\mathcal{C}_O$ implicano che la forza a distanza (forza gravitazionale) che si esercita tra due elementi qualsiasi di $\mathcal{U}$ sia necessariamente espressa dalla legge di gravitazione universale (con k costante di gravitazione universale).*

Si può perciò concludere che il risultato espresso da (5.1) — e cioè che il punto P si muove come se la massa $\mathcal{M}$ di $\mathcal{S}_{OP}$ fosse concentrata nel centro O e la forza specifica esercitata su P da O fosse direttamente proporzionale a $\mathcal{M}$ e inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza da P — è caratteristico della legge di gravitazione universale.

I risultati VI e VII permettono di ritenere *a posteriori* ammissibile il modo di procedere, a cui si accenna al termine del §3, per dedurre l'equazione (3.4).

7. Equivalenza dal punto di vista dinamico dei riferimenti naturali.

Ricordando (2.4') e (4.1), risulta, qualunque sia l'elemento O' di $\mathcal{U}$ e quindi il riferimento naturale $\mathcal{C}_{O'}$:

$$(7.1) \quad \frac{d^2 O'P}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi k \mu O'P,$$

equazione in tutto analoga all'equazione (3.4) ed esprime che:

VIII. *Analogamente a quanto accade per la legge (2.3'), l'equazione fonda-*

(22) Si ha pertanto che anche nel caso in cui $\mathcal{U}$ sia limitato sussiste l'equazione (4.1), la quale, come segue da (4.2), indica che per $\mu \leq 3h^2/8\pi k$ $\mathcal{U}$ si espande indefinitamente.

mentale della dinamica, scritta per qualsiasi elemento P di $\mathcal{U}$, conserva inalterata la sua forma, data da (7.1), qualunque sia il riferimento naturale $\mathcal{C}_O$.

Ricordando poi che risulta

$$k\mu \int_{\mathcal{S}_{O'P}} \frac{PQ}{|PQ|^3} d\mathcal{C} = -\frac{4}{3} \pi k\mu O'P,$$

dove con $\mathcal{S}_{O'P}$ si è ora indicata la sfera di centro O' e raggio $|O'P|$, si può affermare che:

IX. Come nel riferimento $\mathcal{C}_O$ il risultante $g(OP, t)$ delle forze specifiche che agiscono su P è dato dal risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate dagli elementi della sfera materiale $\mathcal{S}_{OP}$, nel riferimento $\mathcal{C}_{O'}$ il risultante $g(O'P, t)$ delle forze specifiche che agiscono su P è dato dal risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate dagli elementi della sfera materiale $\mathcal{S}_{O'P}$.

In altri termini:

X. Il fluido $\mathcal{U}$ ha lo stesso comportamento dinamico, espresso dalla legge (7.1) e precisato dal risultato IX, rispetto a tutti i riferimenti naturali.

Si può quindi affermare che:

XI. Tutti i riferimenti naturali sono tra loro equivalenti, nel senso che $\mathcal{U}$ ha, sia dal punto di vista cinematico che da quello dinamico, lo stesso comportamento rispetto ad essi.

Con ciò si intende dire che, qualunque sia il riferimento $\mathcal{C}_{O'}$ scelto fra i suddetti, sussiste l'eguaglianza (2.3') (e, di conseguenza, l'eguaglianza (2.4')) e l'equazione fondamentale della dinamica scritta per un qualunque elemento P di $\mathcal{U}$ e riferita all'unità di massa è espressa dall'equazione (7.1), con il risultante $g(O'P, t)$ delle forze specifiche che agiscono su P dato dal risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate dagli elementi della sfera materiale $\mathcal{S}_{O'P}$.

Chiamato *inerziale* ogni riferimento in cui vale la legge fondamentale della dinamica così come è stata enunciata all'inizio del §3, si può pertanto aggiungere che:

XII. Qualunque sia il riferimento naturale $\mathcal{C}_O$ rispetto al quale si considera il moto di P , tutto accade come se il riferimento $\mathcal{C}_O$ fosse inerziale e $\mathcal{U}$, che agisce su P tramite le forze gravitazionali esercitate su esso dai suoi elementi, si limitasse unicamente alla sfera materiale $\mathcal{S}_{O'P}$.

Questo risultato, affermando che agli effetti del moto di P ogni riferimento naturale si comporta come se fosse inerziale, permette di eliminare il carattere di riferimento privilegiato che inizialmente è stato attribuito a $\mathcal{C}_O$. Considerato

infatti un qualunque altro riferimento naturale $\mathcal{C}_{O'}$, stante il suddetto risultato esso si comporta, in accordo con la definizione di riferimento inerziale qui data, come se su P agissero unicamente le forze gravitazionali su esso esercitate dagli altri elementi di $\mathcal{U}$. A questo punto si possono ripetere per $\mathcal{C}_{O'}$ le medesime considerazioni svolte per $\mathcal{C}_O$, pervenendo direttamente all'equazione (7.1) (con la medesima costante k), e successivamente ai risultati contenuti nei §§ 4, 5, 6 e nel presente §. Si ha cioè:

XIII. Il riferimento naturale $\mathcal{C}_O$ risulta totalmente indistinguibile dagli altri riferimenti naturali.

La conclusione contenuta nel risultato XII che agli effetti del moto di P ogni riferimento naturale si comporta come se fosse inerziale non sta affatto a significare che, considerati due siffatti riferimenti, $\mathcal{C}_{O'}$ e $\mathcal{C}_{O''}$, essi siano in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro. Infatti l'accelerazione di O'' rispetto a $\mathcal{C}_{O'}$ è diversa da zero, e precisamente è data, ricordando il risultato III, da $(\dot{h} + h^2)O'O''$; nonostante ciò, sussiste il risultato XII, e l'apparente paradosso si spiega tenendo presente che il fatto che l'equazione del moto di P abbia la stessa forma in ogni riferimento naturale non sta affatto a significare che detta equazione sia la medesima in ognuno di essi: cambiando riferimento cambia infatti il termine $4/3 \pi k \mu O'P$, ossia cambia il risultante delle forze specifiche agenti su P , risultante che invece si dovrebbe mantenere immutato se detti riferimenti fossero in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro.

Al riguardo va osservato che dall'eguaglianza

$$\frac{d^2 O'P}{dt^2} = \frac{d^2 O''P}{dt^2} + \frac{d^2 O'O''}{dt^2},$$

ricordando il risultato III, l'equazione (4.1) e il risultato IX, si ottiene

$$(7.2) \quad \frac{d^2 O'P}{dt^2} = g(O''P, t) + g(O'O'', t),$$

eguaglianza esprime che rispetto al riferimento $\mathcal{C}_{O'}$ la forza specifica di trascinamento che agisce su P è uguale al risultante $g(O'O'', t)$ delle forze specifiche che agiscono su O'' , ossia al risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate su O'' dalla sfera materiale $\mathcal{S}_{O'O''}$.

Pertanto, al variare di $\mathcal{C}_{O''}$ nell'intera classe dei riferimenti naturali risulta definito rispetto al riferimento $\mathcal{C}_{O'}$ un campo di forze di trascinamento che coincide con il campo di forze gravitazionali definito, al variare di O'' in $\mathcal{U}$, da $g(O'O'', t)$.

8. Risultante delle forze gravitazionali specifiche valutato in un riferimento naturale.

Come già è implicito nelle considerazioni svolte nel §7, dall'indistinguibilità del riferimento $\mathcal{T}_O$ dagli altri riferimenti naturali discende l'inscindibilità tra forza specifica di trascinamento e risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate da $\mathcal{U}$ su P : di esse, in ogni riferimento naturale $\mathcal{T}_O$, rispetto al quale si consideri il moto di P , si conosce, e si può conoscere ⁽²³⁾, soltanto il risultante, dato dal risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate su P dalla sfera materiale $\mathcal{S}_{O'P}$. Si ha quindi:

XIV. La forza specifica di trascinamento ed il risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate da $\mathcal{U}$ su P si presentano inscindibili e ammettono come risultante, qualunque sia il riferimento naturale $\mathcal{T}_O$ rispetto al quale si considera il moto di P , il risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate su P dalla sfera materiale $\mathcal{S}_{O'P}$, mentre la parte di $\mathcal{U}$ esterna a detta sfera non dà alcun contributo al moto di P .

Si può pertanto parlare, invece che di risultante della forza specifica di trascinamento e delle forze gravitazionali specifiche, e come d'altronde suggeriscono le considerazioni svolte al §6, di *risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate da $\mathcal{U}$ su P , valutato in un dato riferimento naturale*. Se il riferimento è $\mathcal{T}_O$, detto risultante è dato dal risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate su P dalla sfera materiale $\mathcal{S}_{O'P}$.

Pertanto la legge fondamentale della dinamica relativa al punto P viene ad assumere, in ogni riferimento naturale, la seguente forma:

XV. Qualunque sia il riferimento naturale $\mathcal{T}_O$ l'accelerazione di P rispetto a $\mathcal{T}_O$ è uguale al risultante $\mathbf{g}(O'P, t)$ delle forze gravitazionali specifiche esercitate da $\mathcal{U}$ su P , valutato in $\mathcal{T}_O$.

Detto enunciato sottolinea ancora una volta l'equivalenza fra tutti i riferimenti naturali e, valendo in particolare per il riferimento $\mathcal{T}_O$, ne elimina ancora una volta e definitivamente il carattere di riferimento privilegiato inizialmente ad esso attribuito.

Infine l'eguaglianza (7.2) si può scrivere

$$\mathbf{g}(O'P, t) = \mathbf{g}(O'O'', t) + \mathbf{g}(O''P, t)$$

ed esprime che:

⁽²³⁾ Almeno sino a quando non emerga la possibilità di individuare fisicamente un effettivo riferimento privilegiato. Si ricordi al riguardo quanto è stato detto nella nota n. 1.

XVI. Qualunque siano i riferimenti naturali $\mathcal{C}_{O'}$ e $\mathcal{C}_{O''}$, il risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate da $\mathcal{U}$ su P , valutato nel riferimento $\mathcal{C}_{O'}$, è uguale alla differenza fra i risultanti delle forze gravitazionali specifiche esercitate da $\mathcal{U}$ rispettivamente su P e O' , valutati nel riferimento $\mathcal{C}_{O''}$.

9. Moto di un punto materiale qualunque entro il fluido $\mathcal{U}$.

Sia ora P , invece che un elemento di $\mathcal{U}$, un qualunque punto materiale di massa m in moto entro il fluido $\mathcal{U}$. Considerato un qualunque riferimento naturale $\mathcal{C}_{O'}$, sia f il risultante delle forze agenti su P , distinto dal risultante delle forze gravitazionali esercitate da $\mathcal{U}$ su P , valutato in $\mathcal{C}_{O'}$.

Le considerazioni svolte ai §§ 7 e 8 permettono di concludere che l'equazione del moto di P risulta espressa, in ogni riferimento naturale, da

$$m \frac{d^2 O'P}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi k m \mu O'P + f,$$

naturalmente ritenendo che la massa m del punto materiale P sia tale da non «perturbare» il moto del fluido $\mathcal{U}$, ossia tale da non modificare la condizione di omogeneità ed il comportamento isotropo di $\mathcal{U}$.

Si ha cioè:

XVII. Qualunque sia il riferimento naturale $\mathcal{C}_{O'}$, il risultante delle forze agenti su un punto materiale P , con esse compreso il risultante delle forze gravitazionali esercitate da $\mathcal{U}$ su P valutato in $\mathcal{C}_{O'}$, è uguale al prodotto della massa di P per la sua accelerazione rispetto a $\mathcal{C}_{O'}$.

10. Intervento dell'integrale dell'energia.

Si considerino due elementi O_1 e O_2 di $\mathcal{U}$ fissati una volta per tutte ma in modo arbitrario e si indichi con $R(t)$ la loro distanza. Dall'eguaglianza

$$\frac{dO_1 O_2}{dt} = \frac{\dot{R}}{R} O_1 O_2,$$

esprimente la velocità di O_2 nel riferimento naturale $\mathcal{C}_{O_1}$, segue, tenendo presente (2.3):

$$(10.1) \quad h(t) = \frac{\dot{R}}{R}.$$

Pertanto la legge (2.3') si può scrivere, qualunque sia l'elemento P ed il riferimento naturale $\mathcal{C}_{O'}$:

$$(10.2) \quad \frac{dO'P}{dt} = \frac{\dot{R}}{R} O'P,$$

e da cui segue subito

$$\frac{d^2 O'P}{dt^2} = \frac{\ddot{R}}{R} O'P.$$

L'equazione (7.1) diventa pertanto

$$(10.3) \quad \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3} \pi k \mu,$$

in cui non vi è più traccia del riferimento $\mathcal{O}_{O'}$.

Il risultato IX permette poi di scrivere l'integrale dell'energia che, ricordando (5.1) e (10.2), dà luogo, come d'altronde facilmente segue da (10.3), all'equazione

$$(10.4) \quad \frac{1}{2} \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{4}{3} \pi k \mu + \frac{\alpha}{R^2},$$

con α valore della costante dell'energia che competerebbe a P , supposto dotato di massa unitaria, qualora fosse a distanza R dall'origine del riferimento rispetto al quale si considera il moto (24).

Da (10.3), (10.4) segue

$$(10.5) \quad 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 2 \frac{\alpha}{R^2}.$$

Le equazioni (10.4) e (10.5) sono formalmente identiche a quelle che si ottengono partendo, invece che dall'osservazione astronomica e dalla meccanica newtoniana, dalla teoria della relatività generale (25). Nell'ambito newtoniano, esse sono state dedotte per la prima volta da Milne e McCrea seguendo la via, *a priori* non giustificata, a cui si è accennato alla fine del §3 (26).

11. Interpretazione cosmologica dei risultati ottenuti.

I risultati ottenuti nei §§ precedenti hanno la seguente interpretazione cosmologica dal punto di vista newtoniano:

(24) Tenendo presente (10.1), il valore α si determina sostituendo in (10.4) i valori attuali di h e μ . Il confronto fra (10.4) e (4.2) precisa poi il legame che intercorre tra a e α .

(25) In tal caso α , a meno di un fattore costante, rappresenta la curvatura scalare dello spazio fisico.

(26) Per ulteriori osservazioni e commenti al riguardo si veda il §13.

XVIII. Dalle ipotesi fatte su $\mathcal{U}$ necessariamente segue:

a) la legge di Hubble, data dall'equazione (2.3), la quale è verificata rispetto a ogni riferimento naturale;

b) la legge del moto per le generiche galassie, data dall'equazione (3.4), e la legge di evoluzione dell'Universo, data dall'equazione (4.1);

c) la legge di gravitazione universale, nel senso che la forza esercitata da una generica galassia su un'altra risulta necessariamente espressa da detta legge.

XIX. Rispetto a un qualsiasi riferimento naturale $\mathcal{T}_O$, la forza risultante che agisce su una qualsiasi galassia P è uguale al risultante delle forze gravitazionali esercitate su P da quella parte dell'Universo contenuta nella sfera $\mathcal{S}_{O'P}$ di centro O' e raggio $|O'P|$.

XX. Tutti i riferimenti naturali sono tra loro equivalenti, nel senso che l'Universo ha, sia dal punto di vista cinematico che da quello dinamico, lo stesso comportamento rispetto ad essi.

E' in quest'ultimo risultato che si può identificare il cosiddetto *principio cosmologico* (27), esprimente in sostanza che:

XXI. Pur variando da istante a istante l'Universo presenta istante per istante il medesimo aspetto da qualunque punto lo si osservi.

Tutti i risultati sino ad ora ottenuti pongono in piena evidenza lo stretto legame che intercorre tra i fondamenti della meccanica newtoniana e la teoria newtoniana della gravitazione, come è evidente dal fatto che la legge di gravitazione universale, e anzi i fondamenti stessi della teoria newtoniana della gravitazione, seguono dalle ipotesi fatte su $\mathcal{U}$, ipotesi suggerite dall'osservazione astronomica.

In tali ipotesi il risultato XVIII-c costituisce la prima prova della validità su scala extragalattica della teoria newtoniana della gravitazione, sino ad oggi verificata soltanto a livello planetario e per le stelle binarie.

12. I riferimenti inerziali.

La totalità dei riferimenti in moto traslatorio uniforme rispetto a un assegnato riferimento naturale $\mathcal{T}_O$, ricordando la definizione di riferimento inerziale data nel §7 e tenendo presente che $\mathcal{T}_O$ si comporta come tale, costituisce la classe dei riferimenti inerziali associata al riferimento naturale $\mathcal{T}_O$. Stante l'equivalenza fra tutti i riferimenti naturali, si ha così, in corrispondenza a ogni riferimento naturale, una classe di riferimenti inerziali.

(27) Cfr., ad es., [5], Cap. II.

Ricordando la precisazione fatta nel § 7 a commento del risultato XI, si ha che due riferimenti inerziali appartenenti a classi diverse, analogamente ai corrispondenti riferimenti naturali che individuano le due classi di appartenenza, risultano tra loro in moto traslatorio non uniforme.

La densità media dell'Universo, piuttosto mal conosciuta, è ritenuta oggi dalla maggior parte degli astronomi dell'ordine di $10^{-30} - 10^{-31} \text{ g cm}^{-3}$, anche se indicazioni osservazionali molto recenti lasciano presumere un valore più alto per detta densità (28). Con tali valori di μ , per una galassia che disti dalla nostra un miliardo di anni luce si ottiene da (3.4) un valore per l'accelerazione che è dell'ordine di $10^{-10} \text{ cm s}^{-2}$.

Con valori così bassi per le accelerazioni degli elementi del fluido cosmologico $\mathcal{U}$ anche per distanze dell'ordine di qualche miliardo di anni luce, si può affermare che i riferimenti naturali, fatta eccezione per i problemi di meccanica celeste extragalattica, si possono ritenere in moto traslatorio uniforme tra loro. Essi vengono così a presentarsi come risultato di un'approssimazione che consiste nel ritenere trascurabili in ogni riferimento naturale $\mathcal{C}_O$, i risultanti delle forze gravitazionali esercitate da $\mathcal{U}$ sui suoi elementi, valutati in $\mathcal{C}_O$, ossia nel ritenere $\mu = 0$. Con $\mu = 0$ le classi di riferimenti inerziali associati agli infiniti riferimenti naturali vengono ad identificarsi in una sola, coincidente con la classe dei riferimenti naturali in cui si supponga appunto $\mu = 0$ (29). Essa si identifica con la classe dei riferimenti inerziali della meccanica, classe che viene così introdotta senza dover ricorrere ad un riferimento assoluto.

Ritenendo che il valore di h sia dell'ordine di $50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, si ha che la velocità v di una galassia che disti dalla nostra 10^3 Mpc (3,26 miliardi di anni luce) è circa $5 \cdot 10^4 \text{ km s}^{-1}$. Risulta pertanto $(1 - v^2/c^2)^{1/2} = 0,98$. Si può perciò concludere che per tali distanze gli effetti relativistici sono ancora del tutto irrilevanti, specialmente se la loro grandezza viene confrontata con l'ordine di grandezza degli errori che le misure astronomiche presentano in corrispondenza a tali distanze.

A questo punto va comunque detto che, fermi restando i risultati ottenuti, l'intera formulazione della teoria i cui fondamenti sono stati qui esposti va a questo punto riesaminata tenendo conto di altri dati osservazionali, quali la scoperta, risalente agli anni sessanta, di oggetti celesti che presentano grandi

(28) Il valore più comunemente accettato oggi per h è di $50 - 55 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Con detti valori per μ e h , da (4.2) risulterebbe $a > 0$ ossia che l'Universo si espanderebbe indefinitamente.

(29) Si osservi in proposito che, ritenendo $h = +\infty$ per $t = 0$, da (4.1), con $\mu = 0$, si ottiene $h = 1/t$, espressione che, sostituita in (2.3'), dà luogo a $dO'P/dt = O'P/t$, ossia a $dO'P/dt = \text{cost.}$, ecc.

spostamenti delle righe spettrali verso il rosso (quasars) — che non permettono quindi di essere esaminati rimanendo nell'ambito newtoniano — e, soprattutto e conseguentemente, tenendo conto del comportamento della luce. E' quanto verrà fatto in una successiva memoria.

13. Osservazioni di carattere storico e commenti ⁽³⁰⁾.

Il primo tentativo di sviluppare una teoria cosmologica risale soltanto alla fine del secolo scorso ad opera di H. Seeliger, tentativo che fallì non tanto per la sua formulazione newtoniana, quanto per l'assunzione che su larga scala l'Universo, ritenuto infinito nello spazio e nel tempo e con una densità stellare mediamente costante, fosse statico, convinzione che era profondamente radicata e universalmente accettata a quel tempo. E, in parte originata da questa, risale a quel periodo la convinzione che il ritenere che l'Universo sia infinito ed omogeneo sia in contrasto con la legge di gravitazione universale (C. Neumann, Seeliger) e che quindi detta legge sia soltanto «a remarkably close approximation and that it fails at sufficiently great distances» ⁽³¹⁾.

Soltanto nel 1934, dopo la scoperta che l'Universo, lungi dall'essere statico, è in espansione e dopo che si era ampiamente affermata la cosmologia relativistica, si ebbe un ritorno alla cosmologia sviluppata in termini newtoniani, per opera di Milne e McCrea ([23], [18]). In [23] Milne scrive: «It seems to have escaped previous notice that whereas the theory of the expanding universe is generally held to be one of the fruits of the theory of relativity, actually all the at-present-observable phenomena could have been predicted by the founders of mathematical hydrodynamics in the eighteenth century, or even by Newton himself. [...] All that is necessary is the Newtonian theory of dynamics and gravitation, combined with the hydrodynamical equation of continuity. Both 'special' and 'general' relativity are unnecessary; Newtonian relativity suffices».

Milne e McCrea provarono che, con una conveniente interpretazione dei risultati che si ottengono, la cosmologia newtoniana presenta profonde analogie con la cosmologia relativistica, al punto che nel 1952 Bondi, in [5], 9.1, scrive al riguardo dei citati lavori di Milne e McCrea: «This new formulation of the old subject is highly interesting, since in spite of our present denial of many of the premisses of Newtonian theory it reveals all the essential features of relativistic cosmology without the mathematical complexity. It also makes the significance of the different terms apparent much more readily, and finally it shows

⁽³⁰⁾ Il presente § è una rielaborazione ampliata e approfondita di [3].

⁽³¹⁾ Cfr. [16], 87.

Newtonian theory to give a very excellent approximation to general relativity not only (as is well known) in ordinary macroscopic physics, but also for large-scale phenomena [...].».

Come già si è ricordato, nel porre i fondamenti per una trattazione da un punto di vista newtoniano della cosmologia, Milne e McCrea, postisi nell'ipotesi che l'Universo $\mathcal{U}$, ritenuto omogeneo, si estenda a tutto lo spazio, ammettono implicitamente che il riferimento $\mathcal{E}_O$ da essi considerato sia inerziale e che risulti nulla, agli effetti del moto di un qualunque elemento P di $\mathcal{U}$, l'azione esercitata dalla parte di $\mathcal{U}$ esterna alla sfera $\mathcal{S}_{OP}$. Conformemente a quanto indica la teoria newtoniana della gravitazione, essi, ritenendo che $\mathcal{U}$ abbia comportamento isotropo rispetto a $\mathcal{E}_O$, scrivono poi direttamente l'equazione (3.4) ⁽³²⁾. Da detta equazione deducono poi la legge di Hubble e le equazioni (10.4), (10.5) e sottolineano quindi le analogie formali, da essi rilevate, che sussistono fra la trattazione newtoniana e quella relativistica.

Nel 1942 Milne, in [24], dopo aver premesso che «the existence of inertial frames appears to indicate that any particle in the universe possesses an absolute acceleration», riprendendo i risultati ottenuti in [23], [18] con le assunzioni ivi fatte, adombra il risultato espresso da (7.2) osservando che «if the roles of O and P are interchanged, P should be able to assume himself as unaccelerated and O as having an acceleration determined by the matter inside the sphere of centre P , radius $|PO|$. In other words, the term in the equations of motion which would be expected on transforming from O to P is annihilated by the changed attraction of the matter of the universe» e commenta: «This means that there is no such thing as absolute acceleration. By appropriate choice of observer O we can make P 's acceleration what we will».

In [5], 9.3, Bondi rileva la necessità di indagare se il riferimento $\mathcal{E}_O$ può essere considerato inerziale oppure no ed al riguardo conclude che «if O 's system of reference were not inertial the deviation from the inertial property would define a direction of acceleration or angular velocity, thus conflicting with the assumption of isotropy». Ed aggiunge: «It is interesting to note that every observer's system is inertial although different observers may be accelerated relatively to

⁽³²⁾ Detto modo di procedere viene seguito in [6]; [7]; [19], 7.2; [28], I,A, ecc. Un'eccezione a tale modo di procedere è costituita dal tentativo fatto da Landsberg in [14] di dedurre la legge di gravitazione universale dalla legge di Hubble. Va però detto, come è stato precisato in [1] e [2], che questo tentativo è sostanzialmente tautologico in quanto l'ipotesi in cui Landsberg si pone implica necessariamente, come pura conseguenza matematica, la legge di gravitazione universale, indipendentemente dalla legge di Hubble.

each other. This is of course not permissible according to the strictly Newtonian system, but as long as we assume that each observer only uses his own system no difficulties or contradictions arise».

Dopo aver premesso che «the full evaluation of $g(OP, t)$ in an infinite system is a somewhat awkward matter», Bondi deduce l'equazione di evoluzione (4.1) mediante l'intervento dell'equazione di Poisson ritenuta verificata in tutto lo spazio, limitandosi ad osservare che «this result — ossia l'equazione (4.1) — could have been deduced directly from (3.1) if it had been assumed that the effective gravitational force on a particle P viewed from O is due entirely to the sphere of matter $\mathcal{S}_{OP}$ » (e, ovviamente, con le forze a distanza espresse dalla legge di gravitazione universale).

Nel 1954 Layzer, in [15], criticando aspramente, ma non per le ragioni suddette, la teoria sviluppata da Milne e McCrea, in accordo con la convinzione che «the inverse-square law of gravitation is evidently not applicable to a universe uniformly filled with matter» e che conseguentemente «no prediction of Newtonian cosmology deserves to be taken seriously unless it has been verified relativistically», nega la possibilità di formulare una teoria cosmologica newtoniana con $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio.

Precisamente Layzer asserisce che «the theory of Milne and McCrea is not self-consistent, being incompatible with the Newtonian conception of gravitation, which it tries to incorporate. As a result all 'Newtonian' derivations of the Einstein-Friedmann equations ⁽³³⁾ are invalid». E fonda questa sua asserzione sulle seguenti considerazioni: «All forms of Newton's law of gravitation depend on the idea that the specific gravitational force at every point is determined by the instantaneous distribution of matter in the universe, and is independent of the state of motion of the matter. The distribution of matter alone, however, defines no preferred direction in space. The specific gravitational force therefore vanishes everywhere». Conseguentemente, «the difficulty pointed out by Bondi — that each of two mutually accelerated observers possesses an inertial frame of reference — disappears, since the expansion is unaccelerated».

«The argument given above — aggiunge Layzer — shows that the Einstein-Friedmann equations are incompatible with the pair of statements: a) the accelerations of particles in the universe relative to a given particle may be equated to gravitational forces, and b) the gravitational force at a given point is completely determined by the instantaneous distribution of matter in the universe. The first statement is, of course, indispensable to the Milne-McCrea theory. Nor can we

⁽³³⁾ Ossia delle equazioni (10.4), (10.5).

drop b) and yet retain the equation $\Delta\phi = -4\pi k\mu$, for this equation not only implies b) but tells us how to calculate the gravitational field when the instantaneous distribution of matter is given. The 'Newtonian' derivations of the Einstein-Friedmann equations are therefore invalid».

Nondimeno, fatte tutte queste considerazioni e tratte le conclusioni sopra riportate, Layzer non esita a sottolineare che dalla teoria della relatività generale discende comunque che «the motion of a particle is given without approximation by Newton's theory if the gravitational influence of the matter outside the particle's co-moving sphere of symmetry ⁽³⁴⁾ is neglected», che è quanto in sostanza esprime il risultato XII.

Si sono volute qui riportare per esteso le argomentazioni di Layzer contro la teoria di Milne e McCrea perché da più parti esse sono state accolte, contribuendo a rendere più che mai diffusa la convinzione che si possa parlare di cosmologia soltanto se si fa ricorso alla relatività generale. Ad esse, ad esempio, si dà ampio spazio, naturalmente accettandole come pienamente valide, in [25], Cap. 8, §9. La convinzione che sia necessario ricorrere alla teoria della relatività generale per provare il risultato XII è poi affatto generale: essa è condivisa, ad esempio, da Weinberg, che, in [27], pag. 475, dopo aver accennato alla deduzione di (10.4) seguendo il modo di procedere di Milne e McCrea, scrive: «we need general relativity to justify the neglect of all the matter outside the sphere $\mathcal{S}_{Op}$ ».

Sotto l'influenza della critica di Layzer e ormai scomparso Milne, nel 1955 McCrea in [20] e [21] rinuncia alla possibilità di una rigorosa formulazione, in un contesto strettamente newtoniano, di una teoria cosmologica newtoniana con $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio, asserendo che, una volta studiato il caso in cui $\mathcal{U}$ sia limitato, «we could let the extent of the system tend to infinity [...]. This is, in effect, what Milne and I did. But it is not a meaningful 'limit'». E aggiunge che l'estensione al caso illimitato si potrebbe effettuare ricorrendo, come ha fatto Bondi, all'equazione di Poisson, per concludere che «an extension to unbounded systems necessarily requires some extension of the meaning to be assigned to newtonian gravitation. The only known extension which is applicable to the systems of interest ⁽³⁵⁾ admits the possibility that the field of force is not uniquely determined by the instantaneous density distribution». In realtà, almeno nel caso esaminato da Milne e McCrea, una volta fatte le ipotesi su $\mathcal{U}$, detto campo di forze, come si è visto al §3, risulta unico e univocamente determinato dal campo delle accelerazioni.

⁽³⁴⁾ La sfera $\mathcal{S}_{Op}$.

⁽³⁵⁾ In realtà dette estensioni possono essere svariate. Si veda in proposito [11], [12].

In [22] McCrea abbandona definitivamente il caso in cui $\mathcal{U}$ sia illimitato, limitandosi al riguardo ad asserire, sempre sotto l'influenza delle obiezioni di Layzer, che «the treatment of an unbounded system is more satisfactorily dealt with by the methods of the theory of general relativity». Ritenendo, come in [20] e [21], $\mathcal{U}$ sferico e riferendosi al riferimento inerziale $\mathcal{E}_O$, con O baricentro di $\mathcal{U}$, McCrea assume come punto di partenza la legge di Hubble e la teoria newtoniana della gravitazione e da queste assunzioni deduce un risultato analogo alla prima parte del risultato XII. L'ipotesi della limitatezza di $\mathcal{U}$ limita però la portata del risultato di McCrea in quanto in tal caso vi è sempre un riferimento, $\mathcal{E}_O$, il cui carattere di riferimento privilegiato non può essere eliminato, carattere che anzi viene da McCrea messo in evidenza. A rigore quindi non è possibile in questo caso parlare di perfetta equivalenza tra tutti i riferimenti naturali, anche perché McCrea non completa la sua indagine sui riferimenti ponendo in evidenza che, comunque considerato il riferimento $\mathcal{E}_{O'}$, con O' contenuto in $\mathcal{U}$, l'elemento P di $\mathcal{U}$ si muove come se $\mathcal{E}_{O'}$ fosse inerziale e su P agisse il risultante delle forze gravitazionali esercitate su esso dalla sfera materiale $\mathcal{S}_{O'P}$.

Nel 1955 - '56 Heckmann e Schücking, nei notevoli lavori [11] e [12], ricollegandosi anche a [24], ripropongono la possibilità di formulare una teoria newtoniana con il fluido $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio e a tale scopo fanno ricorso al potenziale gravitazionale — il cui gradiente fornisce la forza esercitata da $\mathcal{U}$ sui suoi elementi — al quale, naturalmente, impongono di soddisfare all'equazione di Poisson ⁽³⁶⁾. Parallelamente, ritenendo $\mathcal{U}$ omogeneo e che la velocità di ogni elemento di $\mathcal{U}$ sia una funzione lineare delle coordinate (e quindi con i coefficienti dipendenti unicamente dal tempo), introducono la classe dei riferimenti in moto traslatorio comunque accelerato rispetto allo spazio assoluto, da essi chiamati «riferimenti inerziali locali», rispetto ai quali $\mathcal{U}$ viene a presentare, da qualunque parte lo si osservi, il medesimo comportamento. Così procedendo risultano ovviamente ammissibili moti molto più generali di quello qui considerato, ma non si può contemporaneamente evitare l'intervento, come invece accade per il suddetto moto, dello spazio assoluto, se non altro per quanto concerne la direzione degli assi che individuano i riferimenti. Detti Autori rilevano che, pur essendo accelerati l'uno rispetto all'altro, ognuno dei suddetti riferimenti risulta, agli effetti del moto di $\mathcal{U}$, come inerziale, ma, più che allo studio sistematico della classe di detti riferimenti (che, per il modo stesso con cui vengono introdotti e considerati, non presentano né possono presentare tutte le caratteristiche e le proprietà di cui godono i riferimenti naturali e che sono state qui messe in evidenza), la loro attenzione è rivolta essenzialmente allo studio del potenziale e al

⁽³⁶⁾ Si veda anche [17], Cap. IX, § § 2, 3.

superamento delle difficoltà che, con $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio e quindi con il potenziale che non si può più ritenere nullo all'infinito, detto studio comporta.

In effetti è convinzione di detti Autori che la trattazione generale con $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio sia possibile unicamente tramite il ricorso alla funzione potenziale, ma Davidson ed Evans nel 1973, in [7], osservano che, ricorrendo a un'opportuna generalizzazione dell'equazione (3.4) invece che al potenziale, è possibile svolgere un'indagine più approfondita di quella svolta da Heckmann e Schücking, anche se con ipotesi meno generali. Tale modo di procedere però implica, come si è visto, l'assunzione, di cui non viene data giustificazione da detti Autori, che rispetto al riferimento $\mathcal{C}_O$ da essi considerato risulti nulla, agli effetti del moto di un qualunque elemento P di $\mathcal{U}$, la forza esercitata dalla parte di $\mathcal{U}$ esterna alla sfera $\mathcal{S}_{OP}$. In realtà è possibile sviluppare sia l'analisi di Heckmann e Schücking che quella di Davidson e Evans non solo senza fare ricorso al potenziale, ma senza nemmeno dover introdurre *a priori* la generalizzazione dell'equazione (3.4), generalizzazione che risulta essere una necessaria conseguenza delle ipotesi fatte su $\mathcal{U}$. In altri termini, detta equazione può essere dedotta procedendo in modo analogo al modo seguito nella presente esposizione, ed è quanto si farà vedere in un lavoro di prossima pubblicazione.

Analogamente a Heckmann e Schücking, Zel'dovich in [29] fa ricorso al potenziale gravitazionale, e quindi all'equazione di Poisson, alla quale però non associa alcuna condizione all'infinito, riconoscendo al riguardo che «of course one must have also the moral courage to work with a potential that is infinite (instead of zero) at infinite distance» e che comunque «we prefer a more sophisticated approach in order to show explicitly that we do not fear contemplating an infinite distribution of matter, nor do we need to cut an artificial sphere out of the infinite uniform matter».

In accordo con l'opinione corrente, Zel'dovich premette che «the very possibility of treating infinite space filled with matter by Newtonian theory seemed doubtful. The gravitational potential is infinite, and the gravitational force cannot be calculated unambiguously but depends on the limiting process by which we pass from a finite to an infinite distribution of matter. These features of the problem, called the 'gravitational paradox', seemed to preclude the possibility of a Newtonian approach». Ma, almeno nell'ipotesi che, in accordo con le osservazioni astronomiche, l'Universo sia omogeneo e che per esso valga la legge di Hubble nella forma espressa da (3.2), il paradosso si può risolvere — osserva Zel'dovich — constatando che la particolare soluzione dell'equazione di Poisson il cui gradiente fornisce il secondo membro dell'equazione (3.4) risulta compatibile con le ipotesi suddette qualora si introduca un'opportuna trasformazione, debitamente interpretata, per il potenziale, la quale consente di conservare alla suddetta soluzione la

stessa forma relativamente alla classe dei riferimenti rispetto ai quali $\mathcal{U}$ si muove di moto traslatorio.

In realtà, nelle suddette ipotesi, non è affatto necessario ricorrere al potenziale e all'equazione di Poisson per risolvere il suddetto paradosso: la possibilità di trattare il caso di $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio, come si è visto ai §§ 3, 5, 7, 8, sussiste senza dubbi di sorta, nel senso che il secondo membro dell'equazione (3.4) risulta univocamente determinato, e il processo di limite con il quale si passa dal caso finito al caso infinito, come si è visto al § 6, non può essere che uno solo, che a sua volta permette di individuare senza ambiguità la forza gravitazionale.

E' il caso di sottolineare ancora che tutti i risultati stabiliti nei §§ precedenti sono stati ottenuti partendo unicamente dalle ipotesi fatte su $\mathcal{U}$ (ossia dall'omogeneità di $\mathcal{U}$ e dal suo comportamento isotropo rispetto ad un riferimento naturale) e dalla legge fondamentale della dinamica.

Come si è visto, da dette ipotesi, suggerite dall'osservazione astronomica, discende, con considerazioni puramente cinematiche, la legge di Hubble, che risulta verificata in ogni riferimento naturale. In questo contesto essa perde quell'aspetto empirico che Hubble stesso le aveva attribuito. Inoltre dalle suddette ipotesi segue che la forza esercitata da ogni generica galassia su un'altra è necessariamente espressa dalla legge di gravitazione universale e che pertanto l'intero processo di espansione dell'Universo è regolato da detta legge.

Alla luce dei suddetti risultati la cosmologia newtoniana si rivela perfettamente valida e perde pertanto quell'aspetto di «naive cosmology» che dai cultori delle sofisticate teorie relativistiche le viene attribuito, cultori che in generale le riconoscono al più il merito di fornire risultati che presentano analogie formali con quelli ottenuti ricorrendo ai modelli relativistici. Ciò è dovuto al fatto che la cosmologia newtoniana è stata sino ad oggi sviluppata assumendo come punti di partenza, invece che dedurli per via matematica dalle indicazioni fornite dall'osservazione astronomica, la legge di gravitazione universale e, più in generale, i fondamenti della teoria newtoniana della gravitazione e ricorrendo inoltre alle assunzioni, invero arbitrarie, introdotte in [23] e [18] da Milne e McCrea e richiamate all'inizio del presente §.

Circa l'aspetto di «naive cosmology» che è stato sino ad oggi in generale attribuito alla cosmologia newtoniana, significativa è la posizione di Bondi che, dopo aver affermato nel suo bel trattato *Cosmology* ([5]) quanto ricordato all'inizio del presente §, poche pagine dopo conclude che: «Newtonian theory serves only as a picture, though a very useful picture, owing to the close analogy with relativistic cosmology» e aggiunge che «it is hardly worth while nowadays to compare Newtonian theory and observation, since the Newtonian concepts are known to be untenable».

Unica eccezione a tale posizione è quella assunta nel 1961 da C. Callan, R. H. Dicke e P. J. E. Peebles in [6]. Non curandosi delle suddette critiche, e nemmeno delle fondate obiezioni che alla teoria sviluppata da Milne e McCrea possono essere effettivamente fatte, e limitandosi essenzialmente a considerare la cosmologia newtoniana dal punto di vista fisico, Callan, Dicke e Peebles scrivono: «It is seldom pointed out that general relativity does not explain or predict the expanding Universe any more than does Newtonian mechanics. [...] There are not mysterious forces tending to disrupt clusters of galaxies. Furthermore, the mechanics of the expansion of the Universe does not even require general relativity for its discussion. [...] Most important of all, this classical treatment of cosmology is neither a crude approximation to the correct relativistic calculation, nor a cooked-up montage cleverly contrived to look like the real thing. It is a completely correct discussion of certain aspects of the cosmological problem. Long ago, McCrea and Milne showed that Newtonian mechanics was capable of describing the expansion of the Universe. However, it does not seem to have been generally recognized that such a classical treatment was not the dynamics of a crude classical model of the Universe but was rather a completely correct treatment of the real Universe».

E senza prevedere che nel contesto della meccanica newtoniana, ricorrendo soltanto ai semplici dati forniti dalle indicazioni astronomiche — e quindi senza far ricorso alla teoria newtoniana della gravitazione —, è possibile dedurre la cosmologia newtoniana, Callan, Dicke e Peebles concludono: «There is nothing mysterious about the motion of galaxies [...] Newtonian mechanics is adequate. The cosmological space has no centrifugal tendencies threatening to disrupt clusters of galaxies, and the expansion of the Universe is not a result of an expanding space pulling the galaxies apart».

Comunque, come già si è detto, l'intera formulazione della cosmologia newtoniana, perfettamente valida, come si è visto al § 12, a «livello locale», va a questo punto riesaminata tenendo conto del comportamento della luce.

Esprimo i miei più vivi ringraziamenti al Prof. B. Barberis per tutta la collaborazione datami nella stesura del presente lavoro.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BARBERIS B., GALLETTO D., *Remarks on P. T. Landsberg's Paper on Hubble's Law and Newton's Law of Gravitation*, Atti Accad. Sci. Torino, 111, pp. 147 - 153 (1977).
- [2] BARBERIS B., GALLETTO D., *Further Remarks on a Paper by P. T. Landsberg*, Atti Accad. Sci. Torino, 112, pp. 103 - 107 (1978).
- [3] BARBERIS B., GALLETTO D., *Sui fondamenti della cosmologia newtoniana. II*, Atti Accad. Sci. Torino, 112, pp. 277 - 284 (1978).

- [4] BARBERIS B., GALLETTO D., *Foundations of Newtonian cosmology* in: «Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics. II» a cura di H. Zorski, Pitman, London, 1979, pp. 19 - 38.
- [5] BONDI H., *Cosmology*, 1^a ed., Cambridge Univ. Press, 1952.
- [6] CALLAN C., DICKE R. H., PEEBLES P. J. E., *Cosmology and Newtonian Mechanics*, Amer. J. Phys., 33, pp. 105 - 108 (1965).
- [7] DAVIDSON W., EVANS A. B., *Newtonian Universes Expanding or Contracting with Shear and Rotation*, Int. J. Theor. Phys., 7, pp. 353 - 378 (1973).
- [8] GALLETTO D., *Sulla legge di Hubble e sulla legge di gravitazione universale*, Atti Accad. Sci. Torino, 110, pp. 335 - 341 (1976).
- [9] GALLETTO D., *Sui fondamenti della cosmologia newtoniana. I*, Atti Accad. Sci. Torino, 111, pp. 545 - 554 (1977).
- [10] GALLETTO D., *Sui fondamenti della meccanica newtoniana e della teoria newtoniana della gravitazione*, Atti Accad. Sci. Torino, 112, pp. 245 - 258 (1978).
- [11] HECKMANN O., SCHÜCKING E., *Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie. I*, Z. Astrophysik, 38, pp. 95 - 109 (1955).
- [12] HECKMANN O., SCHÜCKING E., *Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie. II*, Z. Astrophysik, 40, pp. 81 - 92 (1956).
- [13] HUBBLE E. P., *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, Proc. Nat. Acad. of Sciences, 15, p. 168 (1929).
- [14] LANDSBERG P. T., *A Deduction of the Inverse Square Law from Newtonian Cosmology*, Nature phys. Sci., 244, pp. 66 - 67 (1973).
- [15] LAYZER D., *On the Significance of Newtonian Cosmology*, Astron. J., 59, pp. 268 - 270 (1954).
- [16] MAC MILLAN W. D., *The Theory of the Potential*, Dover, New York, 1958 (ristampa dell'edizione del 1930).
- [17] MAVRIDÈS S., *L'Univers relativiste*, Masson, Paris, 1973.
- [18] McCREA W. H., MILNE E. A., *Newtonian Universes and the Curvature of Space*, Quart. J. Math. (Oxford Ser.), 5, pp. 73 - 80 (1934).
- [19] McCREA W. H., *Cosmology*, Rep. Progr. Physics, 16, pp. 321 - 363 (1953).
- [20] McCREA W. H., *Newtonian Cosmology*, Nature, 175, p. 466 (1955).
- [21] McCREA W. H., *On the Significance of Newtonian Cosmology*, Astron. J., 60, pp. 271 - 274 (1955).
- [22] McCREA W. H., *On Newtonian Frames of Reference*, Math. Gaz., 39, pp. 287 - 291 (1955).
- [23] MILNE E. A., *A Newtonian Expanding Universe*, Quart. J. Math. (Oxford Ser.), 5, pp. 64 - 72 (1934).
- [24] MILNE E. A., *On «Absolute Acceleration»*, Nature, 150, p. 489 (1942).
- [25] NORTH J. D., *The Measure of the Universe*, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [26] SIGNORINI A., *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*, Vol. II, Perrella, Roma, 1954.
- [27] WEINBERG S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.
- [28] ZEL'DOVICH Ya.B., *Survey of Modern Cosmology*, in: «Advances in Astronomy and Astrophysics», 3, pp. 241 - 379, Academic Press, New York-London, 1965.
- [29] ZEL'DOVICH Ya.B., *Hydrodynamics of the Universe*, Ann. Rev. Fluid Mech., 9, pp. 215 - 228 (1977).

APPENDICE I

Bruno BARBERIS · Dionigi GALLETO

OSSERVAZIONI SULLA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE (1)

1. Trattando della forza gravitazionale si impone, almeno preliminarmente, come logicamente necessaria la distinzione fra «masse gravitazionali attive» e «masse gravitazionali passive», la cui definizione verrà precisata nelle considerazioni che seguono (2).

Siano $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ due punti materiali e P_1 e P_2 le loro posizioni (3) rispetto ad un assegnato riferimento.

Escludendo la possibilità che la forza a distanza (forza gravitazionale) (4) che si esercita fra i suddetti due punti possa dipendere esplicitamente dal tempo (ossia che possa variare anche nel caso in cui i due punti materiali si conservino immutati e mantengano immutata la loro distanza), la forza F_{12} esercitata su $\mathcal{P}_2$ da $\mathcal{P}_1$ dipende unicamente da $\mathcal{P}_1$, da $\mathcal{P}_2$ e dalla distanza $|P_1 P_2|$ dei due punti, è diretta, per motivi di simmetria, secondo il vettore $P_1 P_2$ e, secondo quanto indica l'esperienza, ha il verso opposto a $u_{12} = P_1 P_2 / |P_1 P_2|$. Si può quindi scrivere, indicando con φ il modulo di F_{12} :

$$(I.1) \quad F_{12} = -\varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) u_{12}.$$

Supposto che il punto materiale $\mathcal{P}_1$ risulti dalla «sovrapposizione» di n punti materiali $\mathcal{P}_1^l$ ($l = 1, 2, \dots, n$), dal principio di sovrapposizione delle forze simultanee (5) segue, con evidente significato dei simboli:

(1) Nella presente appendice vengono riprese e opportunamente approfondite le considerazioni svolte in [1].

(2) Si veda anche [5], §1.2; [3], Cap. III, §3; [2], §3.2, ecc. Tale distinzione viene però fatta da questi autori assumendo che la dipendenza delle forze gravitazionali dalle masse sia lineare. Invece nella presente appendice la suddetta dipendenza viene provata.

(3) Per motivi di chiarezza espositiva, in questa appendice punti o elementi materiali e posizioni da essi occupate verranno indicati con simboli differenti.

(4) E' ovvio che si esclude l'eventualità che i due punti siano elettrizzati.

(5) Cfr., ad es., [4], Cap. X, nn. 5, 9.

$$(I.2) \quad \varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = \sum_1^n \varphi(\mathcal{P}_1^l, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|).$$

Premesso che si dirà che due punti materiali $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_1'$ possiedono la stessa «massa gravitazionale attiva» (massa g.a.) se risulta

$$\varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = \varphi(\mathcal{P}_1', \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)$$

— eguaglianza che l'esperienza indica essere indipendente da $\mathcal{P}_2$ e da $|P_1 P_2|$ — si fissi una volta per tutte un punto materiale $\mathcal{P}$ e si supponga che il punto materiale $\mathcal{P}_1$ risulti dalla sovrapposizione di n punti materiali aventi tutta la massa g.a. uguale a quella di $\mathcal{P}$. In tal caso dal principio di sovrapposizione delle forze simultanee, ossia da (I.2), segue

$$\varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = n\varphi(\mathcal{P}, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)$$

e l'intero n esprime in tal caso la massa g.a. di $\mathcal{P}_1$, definizione che è indipendente dal punto $\mathcal{P}_2$ e dalla distanza $|P_1 P_2|$ e che ovviamente implica che sia assunta come unitaria la massa g.a. di $\mathcal{P}$.

Supposto invece che la sovrapposizione di m punti materiali aventi tutti la massa g.a. uguale a quella di $\mathcal{P}_1$ dia luogo a un punto materiale avente la massa g.a. uguale a quella di $\mathcal{P}$, il principio di sovrapposizione delle forze simultanee dà luogo nel presente caso all'eguaglianza

$$\varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = \frac{1}{m} \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)$$

e la massa g.a. di $\mathcal{P}_1$ è nel presente caso espressa da $1/m$.

Supposto ora che il punto $\mathcal{P}_1$ risulti dalla sovrapposizione di n punti materiali aventi tutti la medesima massa g.a. uguale a $1/m$, dalle considerazioni ora svolte segue subito

$$(I.3) \quad \varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = \frac{n}{m} \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)$$

e la massa g.a. di $\mathcal{P}_1$ è ora espressa dal numero razionale positivo n/m .

2. Si supponga infine che il punto $\mathcal{P}_1$ non rientri nei casi ora esaminati. In tal caso il rapporto

$$\alpha = \frac{\varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)}{\varphi(\mathcal{P}, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)}$$

non può essere un numero razionale in quanto, se così fosse, sussisterebbe l'eguaglianza (I.3) e la massa g.a. di $\mathcal{P}_1$ risulterebbe espressa, contro l'ipotesi, da n/m . Inoltre, a differenza di quanto accade nei casi sino ad ora esaminati, non si può escludere, almeno *a priori*, che detto rapporto possa dipendere da $\mathcal{P}_2$ e da $|P_1 P_2|$. Ritenendo pertanto fissati $\mathcal{P}_2$ e $|P_1 P_2|$, si possono considerare due classi contigue $\{\beta_i\}$ e $\{\beta'_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, \beta_i < \beta'_i$) di numeri razionali positivi aventi α come elemento di separazione e, con esse, due insiemi numerabili di punti materiali, $\{\mathcal{Q}_i\}$ e $\{\mathcal{Q}'_i\}$, punti materiali aventi come corrispondenti masse g.a. i numeri delle suddette due classi.

Da $\beta_i < \alpha < \beta'_i$, moltiplicando per $\varphi(\mathcal{P}, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)$, segue

$$(I.4) \quad \varphi(\mathcal{Q}_i, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) < \varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) < \varphi(\mathcal{Q}'_i, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|),$$

diseguaglianza che sussiste, oltre che per ogni $\mathcal{Q}_i$ e $\mathcal{Q}'_i$, per ogni $\mathcal{P}_2$ e ogni $|P_1 P_2|$. Se infatti esistesse un punto materiale $\mathcal{P}'_2$ in corrispondenza del quale, ad esempio, si avesse

$$\varphi(\mathcal{Q}_i, \mathcal{P}'_2, |P_1 P_2|) = \varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}'_2, |P_1 P_2|),$$

$\mathcal{P}_1$ avrebbe, a norma di definizione, la stessa massa g.a. di $\mathcal{Q}_i$, il che è assurdo. Ad analoga conclusione si perviene se esistesse per $\mathcal{P}_2$ una posizione P'_2 in corrispondenza alla quale sussistesse un'eguaglianza analoga a quella ora scritta.

Da (I.4), passando al limite, segue pertanto, per ogni $\mathcal{P}_2$ e ogni $|P_1 P_2|$:

$$\varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = \alpha \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)$$

e la massa g.a. di $\mathcal{P}_1$ è nel presente caso espressa dal numero irrazionale α .

Le considerazioni sino ad ora svolte permettono di concludere che il rapporto

$$\frac{\varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)}{\varphi(\mathcal{P}, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)}$$

risulta in ogni caso indipendente da $\mathcal{P}_2$ e da $|P_1 P_2|$ ed esprime la *massa gravitazionale attiva* del punto materiale $\mathcal{P}_1$, assumendo come unitaria la massa g.a. del punto materiale $\mathcal{P}$, fissato una volta per tutte. Essa verrà indicata con $m_1^{(a)}$.

Si può pertanto scrivere, ponendo $\varphi(\mathcal{P}, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = \varphi_1(\mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)$:

$$(I.5) \quad \varphi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = m_1^{(a)} \varphi_1(\mathcal{P}_2, |P_1 P_2|),$$

eguaglianza che, sostituita in (I.1), dà luogo a

$$(I.6) \quad \mathbf{F}_{12} = -m_1^{(a)} \varphi_1(\mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) \mathbf{u}_{12}.$$

Indicando con $m_1^{(a)}$ la massa g.a. di $\mathcal{P}_1$, la sostituzione di (I.5) in (I.2) pone poi in evidenza come la massa g.a. goda della proprietà additiva:

$$(I.7) \quad m_1^{(a)} = \sum_1^n m_1^{l(a)},$$

come d'altra parte è implicito nelle considerazioni che hanno condotto alla sua definizione.

Le considerazioni ora svolte per $\mathcal{P}_1$, potendosi ripetere immutate per $\mathcal{P}_2$, implicano, analogamente a (I.5), che la grandezza della forza F_{21} esercitata da $\mathcal{P}_2$ su $\mathcal{P}_1$ risulti uguale al prodotto della massa g.a. $m_2^{(a)}$ di $\mathcal{P}_2$ per il valore assunto da φ_1 in corrispondenza a $\mathcal{P}_1$ e alla distanza $|P_1 P_2|$. Risulta cioè

$$(I.8) \quad F_{21} = \varphi(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1, |P_1 P_2|) u_{12} = m_2^{(a)} \varphi_1(\mathcal{P}_1, |P_1 P_2|) u_{12}.$$

3. Ricorrendo al terzo principio della dinamica, da (I.6), (I.8) segue

$$(I.9) \quad m_1^{(a)} \varphi_1(\mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = m_2^{(a)} \varphi_1(\mathcal{P}_1, |P_1 P_2|).$$

Analogamente, supponendo che il punto $\mathcal{P}_2$ risulti dalla sovrapposizione di n punti materiali $\mathcal{P}_2^l$, in corrispondenza ad ognuno di questi punti si ottiene

$$(I.10) \quad m_2^{l(a)} \varphi_1(\mathcal{P}_1, |P_1 P_2|) = m_1^{(a)} \varphi_1(\mathcal{P}_2^l, |P_1 P_2|), \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Sommando le n eguaglianze (I.10) e tenendo presente (I.7), (I.9), si ottiene

$$(I.11) \quad \varphi_1(\mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = \sum_1^n \varphi_1(\mathcal{P}_2^l, |P_1 P_2|),$$

eguaglianza analoga alla (I.2) ma che, a differenza di quest'ultima che è conseguenza del principio di sovrapposizione delle forze simultanee, è conseguenza del terzo principio della dinamica.

Anche ora, premesso che si dirà che due punti $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_2'$ possiedono la stessa «massa gravitazionale passiva» (massa g.p.) se risulta

$$\varphi_1(\mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = \varphi_1(\mathcal{P}_2', |P_1 P_2|)$$

— eguaglianza che l'esperienza indica essere indipendente da $|P_1 P_2|$ — si fisserà una volta per tutte un punto materiale $\mathcal{P}'$, dopo di che, ricorrendo a (I.11) e procedendo in modo ormai ovvio, si perviene alla conclusione che il rapporto

$$\frac{\varphi_1(\mathcal{P}_2, |P_1 P_2|)}{\varphi_1(\mathcal{P}', |P_1 P_2|)}$$

è indipendente da $|P_1 P_2|$: esso esprime la *massa gravitazionale passiva* del punto materiale $\mathcal{P}_2$, valutata assumendo come unitaria la massa g.p. del fissato punto materiale $\mathcal{P}'$. Essa verrà indicata con $m_2^{(p)}$.

Si può pertanto scrivere

$$\varphi_1(\mathcal{P}_2, |P_1 P_2|) = m_2^{(p)} f(|P_1 P_2|),$$

con f funzione della sola distanza $|P_1 P_2|$, eguaglianza che, sostituita in (I.6), (I.8), dà luogo a

$$F_{12} = -m_1^{(a)} m_2^{(p)} f(|P_1 P_2|) u_{12}, \quad F_{21} = m_2^{(a)} m_1^{(p)} f(|P_1 P_2|) u_{12}.$$

Dal terzo principio della dinamica segue pertanto (6)

$$(I.12) \quad \frac{m_1^{(a)}}{m_1^{(p)}} = \frac{m_2^{(a)}}{m_2^{(p)}},$$

eguaglianza esprime che il rapporto fra la massa gravitazionale attiva e la massa gravitazionale passiva è indipendente dai corpi.

Tale rapporto si può assumere uguale all'unità — il che equivale ad identificare il punto materiale $\mathcal{P}'$ con il punto materiale $\mathcal{P}$ — con la conseguenza che, come d'altronde è implicito nelle considerazioni che hanno condotto alla definizione di massa g.p., la massa g.a. e la massa g.p. si vengono così ad identificare in una unica massa, la massa gravitazionale $m^{(g)}$.

Risulta pertanto

$$F_{12} = -m_1^{(g)} m_2^{(g)} f(|P_1 P_2|) u_{12}.$$

Assumendo infine, conformemente a quanto indica l'esperienza, che il rapporto fra massa gravitazionale e massa inerziale sia indipendente dai corpi e ponendolo uguale all'unità — identificando così la massa gravitazionale con la massa inerziale — si deduce che la forza gravitazionale esercitata da $\mathcal{P}_1$ su $\mathcal{P}_2$ non può essere che del seguente tipo

$$(I.13) \quad F_{12} = -m_1 m_2 f(|P_1 P_2|) u_{12},$$

avendo indicato con m_1 e m_2 le masse inerziali di $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

Detta eguaglianza esprime che la forza gravitazionale che si esercita fra due punti materiali dipende linearmente dalle masse. Il modo con cui si è ad essa pervenuti permette di concludere che tale dipendenza lineare — una volta precisato che le definizioni di eguaglianza tra masse g.a. e masse g.p. hanno carattere intrinseco — risulta essere una conseguenza del principio di sovrapposizione delle forze simultanee e del terzo principio della dinamica.

(6) L'eguaglianza (I.12) è dedotta anche in [3], Cap. III, § 3, dove è stata ottenuta però come immediata conseguenza del terzo principio della dinamica e della legge di gravitazione universale. Allo stesso modo in [5], § 1.2 è dedotta un'eguaglianza analoga.

4. Quanto ora ottenuto si può generalizzare senza difficoltà, ricorrendo a (I.13) e al principio di sovrapposizione delle forze simultanee, sia al caso di un sistema discreto di punti materiali che al caso di un mezzo continuo.

Ad esempio, nel caso di un mezzo continuo $\mathcal{U}$, si ottiene che il risultante $g(P, t)$, riferito all'unità di massa, delle forze gravitazionali esercitate su un qualunque elemento $\mathcal{P}$ di $\mathcal{U}$ dagli altri suoi elementi $\mathcal{Q}$ risulta espresso da

$$(I.14) \quad g(P, t) = \int_{\mathcal{C}} \mu(Q, t) f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C},$$

dove con P e Q sono indicate le posizioni degli elementi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, con $\mathcal{C}$ si è indicata la configurazione assunta da $\mathcal{U}$ nell'istante considerato e con $\mu(Q, t)$ la sua densità.

Stante il suo significato fisico, è ovvio che la funzione $f(|PQ|)$ risulta definita per ogni $P \neq Q$. Scrivendo l'eguaglianza (I.14) è poi ovvio che, indicato con $\mathcal{C}'$ un qualsiasi dominio contenuto in $\mathcal{C}$ e contenente $\mathcal{P}$ (all'interno se $\mathcal{P}$ è interno a $\mathcal{C}$ e, ovviamente, sulla frontiera se $\mathcal{P}$ è sulla frontiera di $\mathcal{C}$) si ritiene che $f(|PQ|)$ sia integrabile in $\mathcal{C} - \mathcal{C}'$. Inoltre, scrivendo che sussiste l'eguaglianza (I.14), si ritiene che l'integrale che in essa compare sia convergente nel senso usuale del termine, ossia nel senso che, comunque considerata una successione di domini $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n, \dots$ contenenti $\mathcal{P}$ e tali che risulti $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}_n \supset \mathcal{C}_{n+1}$ per ogni n e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } \mathcal{C}_n = 0,$$

il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C} - \mathcal{C}_n} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C}$$

esista finito e sia indipendente dalla successione di domini considerata.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BARBERIS B., GALLETTO D., *Remarks on Newton's Law of Gravitation*, Atti Accad. Sci. Torino, 111, pp. 435 - 439 (1977).
- [2] BERRY M., *Principles of cosmology and gravitation*, Cambridge Univ. Press, 1976.
- [3] MAVRIDÈS S., *L'Univers relativiste*, Masson, Paris, 1973.
- [4] SIGNORINI A., *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*, Vol. II, Perrella, Roma, 1954.
- [5] TRAUTMAN A., *Foundations and Current Problems of General Relativity*, in: «Lectures on General Relativity», Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, Prentice Hall, 1965.

APPENDICE II

Bruno BARBERIS - Dionigi GALLETO

UNA PROPRIETA' CARATTERISTICA DEL CAMPO DI ATTRAZIONE NEWTONIANO

Sussiste il teorema:

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo aperto $(0, +\infty)$, a una semiretta dell'ordinario spazio euclideo tridimensionale $\mathcal{R}^3$ e O la sua origine. Supposto che per ogni punto P di a risulti ⁽¹⁾

$$(II.1) \quad \int_{\mathcal{S}_{OP}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = -\frac{4}{3} \pi k OP,$$

con k costante e dove con $\mathcal{S}_{OP}$ si è indicato il dominio sferico di centro O e raggio $|OP|$, la funzione $f(x)$ risulta univocamente determinata e precisamente si ha

$$(II.2) \quad f(x) = \frac{k}{x^2}.$$

Per provare il teorema ora enunciato si ponga

$$r = |OP|, \quad \rho = |OQ|, \quad x = |PQ|, \quad \vartheta = \widehat{POQ}$$

e si proietti l'eguaglianza (II.1) su a . Indicando con σ la superficie sferica di centro O e raggio ρ , si ottiene

$$(II.3) \quad \int_0^r \left(\int_{\sigma} f(x) \frac{r - \rho \cos \vartheta}{x} d\sigma \right) d\rho = \frac{4}{3} \pi k r.$$

Da

$$x^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta,$$

(1) E' ovvio che, scrivendo l'eguaglianza (II.1), si suppone che l'integrale che in essa compare sia convergente nel senso richiamato in Appendice I, n. 4.

segue che su σ risulta

$$x \, dx = r \rho \sin \vartheta \, d\vartheta$$

e che quindi si ha

$$\begin{aligned} \frac{r - \rho \cos \vartheta}{x} \, d\sigma &= \frac{r - \rho \cos \vartheta}{x} \, \rho^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= \rho \frac{r^2 + x^2 - \rho^2}{2r^2} \, dx \, d\varphi. \end{aligned}$$

L'eguaglianza (II.3) diventa pertanto

$$(II.4) \quad \int_0^r \rho \left(\int_{r-\rho}^{r+\rho} (r^2 + x^2 - \rho^2) f(x) \, dx \right) d\rho = \frac{4}{3} k r^3.$$

Da (II.4), integrando per parti e indicando con $f_i(x)$ la primitiva di $f_{i-1}(x)$, con $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $f_0(x) = f(x)$, si ottiene

$$\begin{aligned} &2r^3 f_2(2r) - 5r^2 f_3(2r) - r^2 f_3(0) + \\ &+ 6r f_4(2r) - 3f_5(2r) + 3f_5(0) = \frac{2}{3} k r^3. \end{aligned}$$

Da questa eguaglianza, che deve essere verificata per ogni $r \in (0, +\infty)$, derivando due volte rispetto a r , si deduce

$$(II.5) \quad f(2r) = \frac{k}{(2r)^2},$$

da cui, dovendo (II.5) sussistere per ogni $r \in (0, +\infty)$, segue l'asserto.

Il teorema ora dimostrato prova che l'eguaglianza (II.1) è caratteristica della funzione (II.2), ossia della funzione che, con $k > 0$, è caratteristica dell'attrazione newtoniana.

APPENDICE III

Bruno BARBERIS - Dionigi GALLETO

DUE TEOREMI DI UNICITA'

A

1. Sussiste il teorema:

A. Sia $\mathcal{S}_O$ un dominio sferico di $\mathcal{R}^3$, $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo aperto $(0, +\infty)$ ed ivi derivabile due volte con derivata seconda continua, $\lambda(v)$ una funzione definita in $(0, +\infty)$. Si supponga che esista in $\mathcal{R}^3$ un punto O tale che per ogni dominio $\mathcal{S}$ omotetico a $\mathcal{S}_O$ con polo in O e per ogni $P \in \mathcal{S}$ risulti:

$$(III.1) \quad \int_{\mathcal{S}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = \lambda(|\mathcal{S}|) PO.$$

con $|\mathcal{S}|$ misura di $\mathcal{S}$.

In tali ipotesi O coincide con il centro di $\mathcal{S}_O$ ed entrambe le funzioni $f(x)$ e $\lambda(v)$ risultano determinate ⁽¹⁾ e precisamente, indicate con k e β due costanti arbitrarie, risulta

$$(III.2) \quad f(x) = \frac{k}{x^2} + \beta x, \quad \lambda(v) = \beta v + \frac{4}{3} \pi k.$$

2. Per provare il teorema ora enunciato, si osservi innanzitutto che, stante (III.1), per ragioni di simmetria il punto O , comunque si scelga P in $\mathcal{S}$, deve trovarsi sulla congiungente P con il centro di $\mathcal{S}$ e pertanto coincide con detto centro. I domini $\mathcal{S}$ risultano pertanto concentrici a $\mathcal{S}_O$.

Introdotta poi un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con origine in O e indicate con x^i ($i = 1, 2, 3$) le coordinate di Q , con y^i le coordinate di P e con $F(|PQ|)$ una qualsiasi primitiva di $f(|PQ|)$ in $(0, +\infty)$, risulta

(1) Ovviamente a meno delle costanti k e β .

$$(III.3) \quad \frac{\partial F(|PQ|)}{\partial y^i} = -f(|PQ|) \frac{x^i - y^i}{|PQ|} = - \frac{\partial F(|PQ|)}{\partial x^i}.$$

Ciò premesso, scelti i domini sferici $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ concentrici a $\mathcal{S}_0$ con la sola condizione che per i rispettivi raggi r_1 e r_2 risulti $r_1 < r_2$, da (III.1) segue, per ogni $P \in \mathcal{S}_1$:

$$\int_{\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = (\lambda(|\mathcal{S}_2|) - \lambda(|\mathcal{S}_1|))PO,$$

da cui, posto

$$(III.4) \quad F_1(|PQ|) = \sum_i^3 \frac{\partial^2 F(|PQ|)}{\partial y^{i2}},$$

per ogni P interno a $\mathcal{S}_1$ si ottiene, ricordando (III.3):

$$(III.5) \quad \int_{\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1} F_1(|PQ|) d\mathcal{C} = 3(\lambda(|\mathcal{S}_2|) - \lambda(|\mathcal{S}_1|)).$$

Ricordando (III.3), da (III.4) segue

$$(III.6) \quad F_1(|PQ|) = f'(|PQ|) + 2 \frac{f(|PQ|)}{|PQ|},$$

eguaglianza che, stante la derivabilità di $f'(|PQ|)$ in $(0, +\infty)$ con derivata continua, implica la derivabilità di $F_1(|PQ|)$ in $(0, +\infty)$ con derivata continua.

3. Posto $r = |OP|$, $\rho = |OQ|$, $x = |PQ|$, $\vartheta = \widehat{POQ}$ e procedendo come nell'Appendice II, si ottiene

$$(III.7) \quad \int_{\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1} F_1(x) d\mathcal{C} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho}{r} \left(\int_{\rho-r}^{\rho+r} x F_1(x) dx \right) d\rho.$$

Denotando con $\mathcal{F}(x)$ una qualsiasi primitiva di $x F_1(x)$, da (III.7) segue

$$r \int_{\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1} F_1(x) d\mathcal{C} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho (\mathcal{F}(\rho+r) - \mathcal{F}(\rho-r)) d\rho,$$

da cui, derivando due volte, come è possibile, rispetto a r e tenendo presente

(III.5), si ottiene

$$(III.8) \quad \int_{r_1}^{r_2} \rho (\mathcal{F}''(\rho + r) - \mathcal{F}''(\rho - r)) d\rho = 0,$$

eguaglianza che, dovendo essere verificata per ogni possibile scelta di r_1 e r_2 nonch  di $r < r_1$, implica

$$\mathcal{F}''(x) = \text{cost.}$$

in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$.

Infatti, posto $r_2 - r_1 = \eta$, da (III.8) segue che esiste un $\bar{\rho} \in [r_1, r_1 + \eta]$ tale che

$$\mathcal{F}''(\bar{\rho} + r) = \mathcal{F}''(\bar{\rho} - r).$$

Stante la continuit  di $\mathcal{F}''(x)$ in $(0, +\infty)$ si ha pertanto, facendo tendere η a 0:

$$\mathcal{F}''(r_1 + r) = \mathcal{F}''(r_1 - r),$$

eguaglianza che, dovendo sussistere per ogni $r \in (0, r_1)$ nonch  per ogni $r_1 \in (0, +\infty)$, implica $\mathcal{F}''(x) = \text{cost.}$ in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$.

Ricordando che $\mathcal{F}'(x) = x F_1(x)$, si ha pertanto

$$(III.9) \quad F_1(x) = \frac{a_2}{x} + a_1,$$

con a_1 e a_2 costanti.

Da (III.6), (III.9) segue quindi

$$f'(x) + 2 \frac{f(x)}{x} = \frac{a_2}{x} + a_1,$$

equazione che, integrata, d , in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$:

$$(III.10) \quad f(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{a_1}{3} x + \frac{a_2}{2},$$

con k costante.

4. Con l'espressione di $f(|PQ|)$ data da (III.10), risulta

$$\int_{\mathcal{S}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = \frac{4}{3} \pi k PO +$$

$$+ \frac{a_1}{3} |\mathcal{S}| PO + \frac{a_2}{2} \int_{\mathcal{S}} \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{S}$$

ed è sufficiente osservare che è

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{S} = \frac{4}{3} \pi \left(R^2 - \frac{1}{5} |OP|^2 \right) PO,$$

con R raggio di $\mathcal{S}$, per concludere che l'eguaglianza (III.1) risulta verificata se e solo se risulta $a_2 = 0$.

Si ha pertanto, ponendo $a_1/3 = \beta$:

$$(III.11) \quad f(|PQ|) = \frac{k}{|PQ|^2} + \beta |PQ|,$$

eguaglianza che risulta verificata in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ stante la continuità di $f(|PQ|)$ in detto intervallo.

Risulta inoltre

$$(III.12) \quad \lambda(|\mathcal{S}|) = \beta |\mathcal{S}| + \frac{4}{3} \pi k.$$

Le espressioni (III.11) e (III.12) non sono altro che le espressioni (III.2) e il teorema A è pertanto completamente dimostrato.

Il confronto di (III.11) con (III.12) permette inoltre di asserire che risulta

$$f(|PQ|) = \frac{\lambda(|\mathcal{S}|)}{|\mathcal{S}|} |PQ| = \frac{\lambda \left(\frac{4}{3} \pi |PQ|^3 \right)}{\frac{4}{3} \pi |PQ|^2}.$$

Questa espressione permette di asserire che, scelto P sulla frontiera di $\mathcal{S}$ (caso in cui per l'integrale che compare in (III.1) vale il teorema della media), il punto in corrispondenza al quale risulta

$$f(|P\bar{Q}|) \frac{P\bar{Q}}{|P\bar{Q}|} |\mathcal{S}| = \lambda(|\mathcal{S}|) PO$$

coincide con il centro O .

B

5. Il teorema A implica il seguente teorema:

B. Sia O un punto di $\mathcal{R}^3$ e sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $(0, +\infty)$, ivi derivabile due volte con derivata seconda continua e tale che, comunque considerato il dominio $\mathcal{C}_O$ nella classe dei domini limitati e contenenti O all'interno, per ogni dominio $\mathcal{C}$ omotetico a $\mathcal{C}_O$ con polo in O e per ogni $P \in \mathcal{C}$ risulti

$$(III.13) \quad \int_{\mathcal{C}} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} d\mathcal{C} = \lambda_1(|\mathcal{C}|) PO,$$

con $\lambda_1(|\mathcal{C}|)$ funzione della misura $|\mathcal{C}|$, funzione per la quale non si può escludere a priori la dipendenza da $\mathcal{C}_O$.

In tali ipotesi le funzioni $f(x)$ e $\lambda_1(v)$ risultano determinate e precisamente, qualunque sia il dominio $\mathcal{C}_O$ scelto nella classe suddetta, risulta

$$f(x) = \beta x, \quad \lambda_1(v) = \beta v,$$

con β costante arbitraria (2), mentre il punto O coincide con il baricentro di $\mathcal{C}_O$.

6. L'eguaglianza (III.13), dovendo sussistere per ogni dominio limitato con O all'interno, sussiste in particolare nel caso dei domini sferici — caso in cui si riduce a (III.1) — e pertanto la funzione $f(x)$, se esiste, è necessariamente espressa o da (III.11) o da un suo caso particolare.

Indicando con G il baricentro di $\mathcal{C}$, la sostituzione di (III.11) in (III.13) dà luogo a

$$(III.14) \quad k \int_{\mathcal{C}} \frac{PQ}{|PQ|^3} d\mathcal{C} + \beta |\mathcal{C}| PG = \lambda_1(|\mathcal{C}|) PO,$$

da cui, considerando la divergenza di ambo i membri calcolata rispetto alle coordinate di P e tenendo presente che risulta (equazione di Poisson (3))

(2) $\lambda_1(v)$ è quindi indipendente da $\mathcal{C}_O$.

(3) Nel senso che, introdotta la funzione potenziale $U(P)$ definita da

$$U(P) = \int_{\mathcal{C}} \frac{k}{|PQ|} d\mathcal{C},$$

funzione il cui gradiente è uguale all'integrale che compare a primo membro di (III.14), sussiste l'equazione di Poisson:

$$\Delta U = -4\pi k.$$

$$\operatorname{div} \int_{\mathcal{C}} k \frac{PQ}{|PQ|^3} d\mathcal{C} = -4\pi k,$$

si ottiene

$$(III.15) \quad \lambda_1(|\mathcal{C}|) = \beta |\mathcal{C}| + \frac{4}{3} \pi k,$$

eguaglianza che, confrontata con (III.12), permette di concludere che, con la espressione di $f(x)$ data da (III.11), risulta

$$\lambda_1(v) = \lambda(v).$$

Sostituendo (III.15) in (III.14) e tenendo presente che l'eguaglianza che così si ottiene deve sussistere comunque si scelgano β e k , ponendo in essa $k = 0$ si ottiene che O necessariamente coincide con il baricentro G di $\mathcal{C}$ e quindi con il baricentro di $\mathcal{C}_O$.

L'eguaglianza (III.14) si riduce pertanto a

$$(III.16) \quad \int_{\mathcal{C}} \frac{PQ}{|PQ|^3} d\mathcal{C} = \frac{4}{3} \pi PO.$$

7. Indicato con M il punto (o uno dei punti) di $\mathcal{C}$ di massima distanza da O e con $\mathcal{S}_{OM}$ il dominio sferico di centro O e raggio $|OM|$, risulta

$$\int_{\mathcal{S}_{OM}} \frac{MQ}{|MQ|^3} d\mathcal{C} = \frac{4}{3} \pi MO.$$

Pertanto, tenendo presente l'eguaglianza (III.16) scritta per $P = M$, si ottiene

$$\int_{\mathcal{S}_{OM} - \mathcal{C}} \frac{MQ}{|MQ|^3} d\mathcal{C} = 0,$$

eguaglianza che è verificata se e solo se risulta $\mathcal{C} \equiv \mathcal{S}_{OM}$, ossia se $\mathcal{C}$ è sferico.

Si può quindi concludere che l'espressione (III.11) per $f(x)$, con $k \neq 0$, può sussistere se e solo se il dominio $\mathcal{C}_O$ è sferico.

Se $\mathcal{C}_O$ non è sferico deve perciò risultare $k = 0$, ossia

$$f(x) = \beta x, \quad \lambda_1(|\mathcal{C}|) = \beta |\mathcal{C}|,$$

con β costante arbitraria, mentre O , come già si è visto, necessariamente coincide

con il baricentro di $\mathcal{C}_O$.

Il teorema B è pertanto completamente dimostrato, e con esso anche il seguente corollario:

C. *L'espressione (III.11) per $f(|PQ|)$ può sussistere se e solo se il dominio $\mathcal{C}_O$ è sferico.*

Gli autori ringraziano il Prof. W. M. Tulczyjew per alcune stimolanti discussioni con lui avute su argomenti connessi a quelli dei teoremi ora dimostrati.



TULLIO REGGE

LE TEORIE UNIFICATE DELLA GRAVITAZIONE

Si sta avvicinando il centenario della nascita di Albert Einstein, un momento ideale per fermarsi e trarre un primo bilancio di quello che la sua opera ha significato per la fisica ed in generale per la cultura contemporanea. In questa sede vorrei più che altro restringere la mia attenzione al progetto che occupò la mente di Einstein in modo quasi esclusivo durante i suoi anni a Princeton, l'idea cioè di costruire una teoria unificata che contenesse in sé come casi particolari sia la gravitazione sia il campo elettromagnetico sia i complessi fenomeni delle particelle elementari. Alla morte di Einstein era appena cominciata la costruzione delle grandi macchine acceleratrici che dovevano accrescere oltre ogni misura le nostre conoscenze empiriche sul microcosmo delle particelle elementari e nessuno poteva immaginare le strutture e le complesse simmetrie che questi dati avrebbero posto in luce. Per questa ragione non dobbiamo considerare il risultato degli sforzi di Einstein come una teoria realistica, ma piuttosto come una presa di coscienza, una realizzazione del fatto che, come ci insegna la storia della fisica, la tendenza da Galileo e Maxwell fino a oggi è sempre stata verso l'unificazione di concetti.

E' umanamente impossibile in questa sede tracciare un quadro storico dei vari tentativi di creare una teoria unificata che si sono succeduti dalla creazione della relatività generale, nel 1916, fino ad oggi.

E' tuttavia possibile rintracciare in questi lavori un filo conduttore che li lega a concetti più avanzati della fisica contemporanea, tra questi le cosiddette «teorie di gauge» (calibro).

La prima teoria di gauge fu opera di H. Weyl nel 1918 - 19. Prima di entrare nei dettagli di questo tentativo, fallito ma molto istruttivo, converrà rifarsi al concetto di curvatura riemanniana, che è alla base della relatività generale. Esso esprime la non integrabilità del trasporto parallelo di Levi-Civita. Il caso più semplice, ma non banale, in cui appare il trasporto di Levi-Civita è quello del triangolo geodetico in due dimensioni. Sul piano la somma degli angoli interni di un triangolo è esattamente π , sulla sfera questa somma vale invece:

$$(1) \quad \Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{S}{R^2}.$$

dove S è l'area del triangolo e R il raggio della sfera.

La quantità

$$K = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S}$$

è dunque la curvatura gaussiana $1/R^2$ della sfera; come ben sappiamo la curvatura riemanniana altro non è che la naturale generalizzazione di questo concetto a più dimensioni. Per una superficie generica vale sempre il limite:

$$(2) \quad K(x) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S}$$

per la curvatura gaussiana in un punto. Vorrei richiamare l'attenzione sul fatto che se si opera il trasporto di Levi-Civita di un vettore A lungo il perimetro del triangolo si trova alla fine un vettore A' che è quello di partenza ruotato precisamente dell'angolo Δ . In dimensioni qualsiasi se trasportiamo alla Levi-Civita un vettore lungo un circuito chiuso lo ritroviamo all'arrivo ruotato di una matrice ortogonale (o di Lorentz, in una teoria fisica) il cui valore dipende dalla curvatura integrale «abbracciata» durante il trasporto. Nella geometria riemanniana il trasporto lungo δx^β è dato dalla formula:

$$(3) \quad \delta B_\mu = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha B_\alpha \delta x^\beta$$

dove i simboli di Christoffel o coefficienti della connessione sono legati alla metrica da:

$$(4) \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha g_{\mu\alpha} = 0.$$

E' precisamente la condizione (4) che assicura la conservazione della lunghezza del vettore durante il trasporto. Dunque la direzione finale di un vettore dipende dal cammino scelto per il trasporto, la lunghezza rimane invece la stessa. Weyl lascia cadere anche questa condizione ed ammette anche per le lunghezze una variazione corrispondente.

La (4) viene sostituita da:

$$(5) \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha g_{\mu\alpha} = -g_{\mu\nu} A_\lambda$$

dove le A_λ sono componenti di un vettore che va identificato con il campo potenziale elettromagnetico. Il campo EM dunque crea nello spazio una nuova forma di curvatura; portando in giro un vettore lo si ritrova con lunghezza alterata e il cambiamento dipende dall'intensità del campo:

$$(6) \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

abbracciato dal cammino. Dunque campo elettrico e magnetico sono manifestazioni di un nuovo tipo di curvatura. La teoria è fallita nella sua forma originale perché conduce ad ammettere un principio di equivalenza generalizzato in cui i fenomeni fisici sono invarianti localmente non solo sotto il gruppo di Lorentz, ma anche sotto cambiamenti di scala. Essa è rimasta tuttavia il prototipo di una generazione di teorie cosiddette di gauge ed è stata rivalutata dalla meccanica quantistica. Infatti tutte le equazioni d'onda per particelle di carica e sono scritte in termini di ampiezze o più in generale di campi complessi ψ .

Tutte queste equazioni sono invarianti sotto le cosiddette trasformazioni di gauge:

$$(7) \quad A_{\mu,a} = A_{\mu,b} - \hbar c \frac{\partial \Lambda_{ab}}{\partial x^\mu} \quad \psi_a = \psi_b e^{i\Lambda_{ab}e}.$$

in cui la ψ viene ora moltiplicata per una fase e non per un numero reale. In queste teorie esiste in modo naturale il concetto di trasporto di un campo carico analogo a (3):

$$(8) \quad \delta\psi = -\frac{ie}{\hbar c} A_\mu \delta x^\mu \psi$$

la cui non integrabilità corrisponde a $F_{\mu\nu} \neq 0$. Come si vede $\delta\psi$ dipende dalla carica e . Nella teoria di Weyl il tensore metrico veniva dilatato dal trasporto, nella meccanica quantistica il gravitone è particella neutra e non risente del campo A_μ . L'invarianza di gauge data da (7) e (8) ha dietro di sé una quantità di dati empirici quanto mai probante. Come si vede dalla (7), la quantità Λ è un angolo $\in S^1$, mentre nella teoria di Weyl si trattava di un elemento di R . Sia S^1 che R sono gruppi di Lie come il gruppo di Lorentz. Weyl era dunque andato vicino ad un oggetto di estremo interesse. Sotto questo punto di vista esistono profonde analogie tra $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, $R_{\mu\nu\sigma}^\lambda$, $SO(3, 1)$ (gruppo di Lorentz) da un lato e A_μ , $F_{\mu\nu}$, S^1 dall'altro. E' questa un'unificazione? Non credo che si tratti di una soluzione soddisfacente; nonostante la loro somiglianza queste strutture non si necessitano a vicenda, limitandosi a coesistere. Infatti questa scoperta formale non mise fine ai tentativi di unificazione ed ebbe invece separatamente applicazioni

e generalizzazioni di alto interesse in fisica con l'avvento dei cosiddetti campi di Yang-Mills. Prima di entrare nel merito di questi campi è doveroso ricordare gli importanti contributi di Cartan alla geometria differenziale ed in particolare alle applicazioni che egli fece della teoria dei gruppi ampliando il concetto di connessione. Questi contributi rimasero in larga misura lettera morta per i fisici e furono essenzialmente riscoperti indipendentemente molti anni dopo i lavori di Cartan. In sostanza Cartan osserva che, invece di scrivere molte formule separate per il trasporto di enti che rappresentano lo stesso gruppo G , è meglio dare una singola formula in cui viene trasportato un elemento del gruppo stesso e da cui derivano tutte le altre. In pratica possiamo considerare al posto della (3) il trasporto di una ennupla di vettori B_μ^ν per cui:

$$(9) \quad \delta B_\mu^\beta = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha B_\alpha^\beta \delta x^\beta.$$

Le componenti B formano una matrice quadrata elemento di $GL(n, R)$. Introducendo la matrice ad elementi 1-forme data da $\Gamma = \{\Gamma_{\mu\beta}^\alpha dx^\beta\}$ possiamo anche scrivere:

$$(10) \quad B^{-1} \delta B - B^{-1} \Gamma B = 0.$$

Notiamo che l'insieme delle 1-forme in (10) ha valori nell'algebra di Lie di $GL(n, R)$ e che $B^{-1} \delta B$ è essenzialmente l'insieme delle 1-forme invarianti per traslazioni a sinistra sul gruppo $GL(n, R)$. Lo schema suggerisce varie generalizzazioni a gruppi qualsiasi. In particolare la (8) riscritta come:

$$(11) \quad \psi^{-1} \delta \psi - i A_\mu dx^\mu = 0$$

ha la stessa forma di (10) ma riferita al gruppo S^1 . Invece di campi tensoriali dobbiamo considerare campi con valori in un gruppo, i quali matematicamente sono sezioni (anche se solo localmente) di fibrati in cui la base è lo spazio-tempo e la fibra è il gruppo stesso. Tra questi hanno grande importanza i cosiddetti fibrati principali. Se E è una varietà differenziabile su cui agisce effettivamente il gruppo G , E può essere considerata come un fibrato con fibra G e base E/G : fibrati di questo tipo sono detti *principali*. Un'altra definizione di fibrato principale si presta meglio della precedente per esaminare il ruolo di (10).

Sia U_a una famiglia di parti, ricoprimento di B . Sia π la proiezione che assegna ad ogni elemento $y \in E$ la corrispondente orbita in B . Per $\pi^{-1} U_a$ intendiamo il cilindro di base U_a ed 'altezza' G (quale orbita). Supporremo che le U_a siano scelte in modo da avere $\pi^{-1} U_a$ omeomorfo di $U_a \times G$ per cui un elemento generico di $\pi^{-1} U_a$ potrà essere rappresentato dalla coppia (x, A_a, a) , $x \in U_a$, $A_a \in G$. Incolando insieme la famiglia di cilindri $\pi^{-1} U_a$ mediante le relazioni:

$$(11) \quad (x, A_a, a) = (x, A_b, b) \quad \text{ove} \quad A_a = \phi_{ab} A_b, \quad x \in U_a \cap U_b \neq \emptyset$$

si riottiene un fibrato principale. Le ϕ_{ab} sono le cosiddette funzioni di transizione e determinano il fibrato. Esse sono legate dalla relazione:

$$(12) \quad \phi_{ab} \cdot \phi_{bc} = \phi_{ac}$$

in $U_a \cap U_b \cap U_c$ per consistenza. Due fibrati caratterizzati dagli stessi B , G , e ricoprimento U_a e tali che le corrispondenti funzioni di transizione siano legate dalla relazione:

$$(13) \quad \phi'_{ab} = \psi_a \phi_{ab} \psi_b^{-1},$$

si dicono *equivalenti* e saranno identificati. Basta infatti porre $A_a = \psi_a A'_a$ per passare da una rappresentazione all'altra. Cerchiamo ora di ritornare verso la (10). Risulta molto naturale in un fibrato la nozione di 'verticale' nella notazione cartesiana (x, A_a, a) . Dicesi *linea verticale* una funzione $I \xrightarrow{\gamma} E$ dove $I = \{0 \leq t \leq 1\}$ e dove $x(t) = \text{cost.}$ Una linea verticale in $\pi^{-1}U_a$ lo è anche in $\pi^{-1}U_b$ e lo è anche in tutti i fibrati equivalenti. Se invece intendiamo per *orizzontale* una linea ove $A_a(t) = \text{cost.}$, vediamo immediatamente che la definizione dipende dall'aperto e non è più valida in U_b se le ϕ_{ab} sono funzioni di x . A questa difficoltà si supplisce con le forme di connessione. Viene dato in ogni U_a una 1-forma Ω_a del tipo:

$$(14) \quad \Omega_a = \omega_a + cd(A_a^{-1}) \Gamma_a, \quad \Gamma_a \text{ 1 forma in } U_a,$$

i valori nell'algebra di Lie $\mathcal{G}$ di G . $cd(A)$ è la rappresentazione *co-aggiunta* di G in $\mathcal{G}$ e le ω_a sono le forme di Cartan invarianti per traslazioni a sinistra nel gruppo G . Tutte queste forme definiscono una unica forma Ω in E purché valgano le condizioni:

$$(15) \quad \Gamma_b = ad(\phi_{ab}^{-1}) \Gamma_a + \phi_{ab}^* \omega.$$

La linea γ si dice *orizzontale*, purché $\gamma^* \Omega = 0$. Le condizioni garantiscono che questa orizzontalità non dipende da U_a . A guardar bene, la orizzontalità altro non è che una versione molto astratta e generalizzata della (10). Infatti la $A^{-1} \delta A$ altro non è che una forma ω invariante a sinistra su $GL(n, R)$, i fattori A^{-1} , A ricostruiscono la $cd(A)$ agente sul secondo termine Γ . L'introduzione di un fibrato principale e della corrispondente forma di connessione ci dà il modo di generalizzare il trasporto parallelo a gruppi qualsiasi di Lie; non si trasportano più vettori o tensori che sono particolari rappresentazioni di questo gruppo, ma si agisce direttamente sul gruppo stesso. Il trasporto di un vettore o comunque quello di una qualunque rappresentazione del gruppo segue con facilità dalla orizzontalità.

Se $G = S^1$, $\mathcal{G}$ risulta unidimensionalmente e $cd(A)$ si riduce all'identità. Inoltre $\omega_a = d\Lambda_a$ dove $A_a = \psi_a = e^{i\Lambda_a}$. Possiamo anche identificare $\omega_b = A_b = e^{i\Lambda_b}$ nella (7). La $\Omega_a = 0$ coincide con (8) purché si ponga:

$$(16) \quad \Omega_a = d\Lambda_a + \frac{e}{\hbar c} A_{a \cdot \mu} dx^\mu = d\Lambda_a + \Gamma_a.$$

Ponendo infine $\phi_{ab} = e^{i\Lambda_{ab}}$ la (15) fornisce nuovamente la trasformazione di gauge per il potenziale vettore:

$$(17) \quad A_{b \cdot \mu} = A_{a \cdot \mu} + \hbar c \frac{\partial \Lambda_{ab}}{\partial x^\mu}.$$

Un fibrato principale corredato della connessione Ω permette di giungere al trasporto parallelo generalizzando la nozione di Levi-Civita e di Weyl secondo uno schema comune, ed applicandola ad un gruppo qualsiasi. E' questa connessione integrabile? A questa domanda risponde la nozione di curvatura. Per maggiore comprensione esplicitiamo l'indice i , finora nascosto in ω . Abbiamo allora le equazioni di Maurer-Cartan per ω^i :

$$(18) \quad d\omega^i + \frac{1}{2} C_{kl}^i \omega^k \wedge \omega^l = 0$$

ove le C_{kl}^i sono le costanti di struttura del gruppo di Lie. Viene chiamata *curvatura* la 2-forma:

$$(19) \quad R^i = d\Omega^i + \frac{1}{2} C_{kl}^i \Omega^k \wedge \Omega^l = ad(A^{-1})_t^i \left(d\Gamma^t + \frac{1}{2} C_{kl}^t \Gamma^k \wedge \Gamma^l \right) = \Lambda R^t$$

che non ha più elementi verticali. Da questa nozione di curvatura si ottengono il tensore di Riemann ed il campo $F_{\mu\nu}$ come caso particolare. Questo fatto ci induce a considerare una volta di più le $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ come potenziali e le $R_{\mu\nu\lambda}^\alpha$ come forze analoghe rispettivamente di A_ψ e $F_{\mu\nu}$. Ciò lascia aperta la domanda: che cosa sono le $g_{\mu\nu}$?

Prima di rispondere vale la pena di osservare che lo schema di Cartan rimase praticamente ignoto ai fisici fino a tempi abbastanza recenti. In particolare il calcolo delle forme non ha preso ancora piede stabilmente nella fisica, dominata ancora dal vecchio calcolo tensoriale. Nel dopoguerra le idee di Cartan vennero faticosamente riscoperte in modo indipendente da vari ricercatori. In particolare Sciama, Kibble ed Utiyama svilupparono il formalismo delle tetradi o «vierbein». In ogni punto dello spazio tempo si consideri una n -pla di vettori covarianti e_μ^a tali che siano ortonormalizzati rispetto alla metrica:

$$(20) \quad g^{\mu\nu} e_\mu^a e_\nu^b = \eta^{ab} \quad \text{oppure} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b.$$

Si potrà sostituire ovunque alle componenti di un vettore A_ν^μ gli scalari $A^b = A^\mu e_\mu^b$ e costruire una teoria basata unicamente su di essi, evitando l'apparizione

delle $g_{\mu\nu}$ e delle $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$. Il modo con cui questo avviene è sottile e dà luogo ad interessanti considerazioni formali. Anzitutto potremo introdurre le forme $e^a = e^a_\mu dx^\mu$.

Si definiscono inoltre le connessioni ω_b^a , secondo la:

$$(21) \quad de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0$$

che determina univocamente le ω_b^a , le quali servono a definire derivate covarianti per gli scalari; si tratta di una nuova covarianza che rimpiazza quella rispetto alle coordinate ormai obsoleta, dato che trattiamo con scalari. Va invece riconosciuto che la teoria ha un elemento di arbitrarietà che consiste nel rimpiazzare le e^a con le $\Lambda_b^a e^b$ dove $\Lambda_b^a(x)$ è una trasformazione di Lorentz. Sotto questo cambiamento la derivata $\partial A^a / \partial x^\mu$ di uno scalare si trasforma come:

$$(22) \quad \frac{\partial A^a}{\partial x^\mu} \rightarrow \Lambda_b^a \frac{\partial A^b}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Lambda_b^a}{\partial x^\mu} A^b$$

che non è omogenea. Introducendo invece la derivata covariante:

$$(23) \quad \frac{\partial A^a}{\partial x^\mu} + \omega_{b,\mu}^a A^b$$

si vede che la trasformazione è omogenea. Abbiamo quindi scambiato il problema della covarianza sotto trasformazioni di coordinate con quello di covarianza sotto trasformazioni locali di Lorentz. E' possibile calcolare direttamente il tensore di Riemann che risulta legato alla forma:

$$(24) \quad R_b^a = d\omega_b^a + \omega_t^a \wedge \omega_b^t,$$

mentre le equazioni del campo di Einstein nel vuoto si scrivono come:

$$(25) \quad R^{ab} \wedge e^c t_{abcd} = 0.$$

Non è più necessario menzionare le $g_{\mu\nu}$ e le $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ che restano quantità sussidiarie. Scrivendo tuttavia la (21) accanto alla (24) si vede che, introducendo Γ^i , dove i prende tutti i valori della a e della coppia $(a \cdot b)$, dette equazioni prendono la forma:

$$(26) \quad d\Gamma^i + \frac{1}{2} C_{kl}^i \Gamma^k \wedge \Gamma^l = R^i$$

dove i corre lungo l'algebra a 10 dimensioni del gruppo di Poincaré e le C_{kl}^i sono appunto le costanti di struttura del gruppo di Poincaré. Le componenti della curvatura ridotta R^i sono del tipo R^{ab} (che è il vecchio tensore di Riemann) e le $R^a = 0$ che risultano nulle per virtù della (21). Cartan propose una teoria in cui

R^a non è nullo e dipende dalla densità locale di spin. La teoria rappresenta una elegante generalizzazione di quella di Einstein ed è sostenuta da molti; purtroppo risulta assolutamente al di là delle nostre possibilità un controllo empirico. Le componenti R^a sono dette *torsione*; torsione è dunque la parte traslazionale della curvatura di Poincaré. E con questo rispondiamo alla domanda su $g_{\mu\nu}$. Essenzialmente $g_{\mu\nu}$ è rimpiazzato dalle e^a_μ .

Le e^a_μ sono pure potenziali ed appaiono con un ruolo simile a quello delle $\omega^a_{b,\mu}$ che rimpiazzano le $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. La (21) diventa una equazione del moto e non più una definizione delle $\omega^a_{b,\mu}$. Comunque sia la (26) ci riporta direttamente allo schema di Cartan per una via inaspettata, sparito il gruppo $GL(4, R)$, è apparso in sua vece il gruppo di Poincaré. Oltre al vantaggio di ritrovare un gruppo familiare ai fisici, quale quello di Poincaré, siamo riusciti a far sparire un'entità scomoda quale le $g_{\mu\nu}$ e rimpiazzarla con le componenti di una connessione. E ciò ci conduce a formulare l'ipotesi che alla fine tutti i campi di materia che appaiono nei vari frammenti delle teorie finora costruite (inclusa la Weinberg-Salam per le interazioni deboli ed elettromagnetiche) si rivelino alla fine pezzi di una connessione di Cartan; la teoria finale dovrà scegliere una lagrangiana adatta per formulare uno schema fisicamente accettabile. Sotto questo punto di vista la teoria di Einstein-Cartan, quale abbiamo formulato per sommi capi è molto più promettente e simmetrica di quella originale ed apre la via a molte generalizzazioni.

Un'altra riscoperta di Cartan è avvenuta tramite i cosiddetti campi di Yang-Mills attraverso le teorie di gauge.

In queste teorie, quali la cromodinamica quantistica (*QCD*), si considera un potenziale A^i_μ dove i corre lungo l'algebra di Lie di un gruppo compatto (SU^2 oppure SU^n) di immediata interpretazione fisica sui supermultipletti delle particelle elementari; questo potenziale coincide con Γ^i e determina quindi una connessione su di un fibrato principale con $G = SU^2, SU^n$ rispettivamente. La curvatura $F^i_{\mu\nu}$ viene chiamata *intensità* del campo. Le Γ^i servono al trasporto parallelo di multipletti corrispondenti a rappresentazioni di G . Tuttavia lo schema considerato aggiunge altri elementi a quello originale di Cartan definendo esplicitamente un'azione che è data da:

$$(27) \quad \text{azione} = \int \sum_i F^{i\mu\nu} F^i_{\mu\nu} d^4x$$

che si presta a speculazioni di alto interesse nella teoria delle particelle elementari. Se fosse $G = S^1$ ritroveremmo la teoria di Maxwell ed in particolare il potenziale coulombiano di una carica e/r , il quale diminuisce con la distanza. Nella *QCD* la struttura non abeliana di G dovrebbe condurre ad un'interazione tra l'analogo delle cariche (quarks) che non diminuisce con la distanza e produce un

confinamento permanente di queste entro dimensioni piccolissime. La mancata osservazione dei quarks provverebbe da questo schema. La teoria di Yang-Mills è stata incorporata nella teoria unificata di Salam-Weinberg conducendo ad un ottimo accordo con i dati sperimentali.

Una terza idea unificante è stata recentemente proposta da Zumino ed applicata alla gravitazione e ad una varietà di situazioni fisiche. E' noto che in natura esistono due famiglie di particelle elementari: i fermioni ed i bosoni. I campi bosonici rimangono invarianti per rotazioni di 2π attorno ad un asse, mentre quelli fermionici cambiano segno. Una proprietà di questo tipo implica che i fermioni obbediscono al principio di esclusione di Pauli, mentre i bosoni danno un maggior peso statistico agli stati in cui più bosoni si trovano nello stesso stato. Finora tutte le simmetrie proposte per le particelle elementari hanno sempre trasformato bosoni in bosoni e fermioni in fermioni. In seguito ai lavori di Weiss, Zumino ed altri, sono state costruite una quantità di teorie della gravitazione in cui il trasporto parallelo di un campo bosonico lo trasforma in parte in campo fermionico e viceversa. Questa possibilità nasce dall'esistenza dei cosiddetti supergruppi in cui vengono raggruppati sotto lo stesso multipletto bosoni e fermioni.

Lo schema illustra un elegante punto di vista concettuale e conduce a riduzioni, ma non all'abolizione di certe infinità che rendono non rinormalizzabile la teoria quantistica della gravitazione in interazione con la materia. Le supersimmetrie sono certamente rotte in natura da uno schema, quale quello di Higgs, che già agisce nel modello di Weinberg-Salam; esse sussistono cioè a livello lagrangiano, ma la simmetria del vuoto è minore di quella globale. Questo fatto rende difficile l'identificazione di strutture supersimmetriche nelle particelle finora classificate. Forse non è distante il giorno in cui uno schema alla Cartan condurrà ad una teoria veramente unificata attraverso la scelta di un gruppo G particolarmente ampio. Va ricordato che se la fisica è geometria, come ci insegnarono Clifford, Klein ed infine Einstein, essa è anche qualche cosa in più: necessitiamo sempre di un principio di azione la cui struttura non è sempre chiara.

A questo proposito giova tornare alla proposta di Einstein-Cartan. Come abbiamo detto tutto è pronto per una teoria in cui il gruppo di Poincaré gioca un ruolo fondamentale, come esemplificato dalla miracolosa apparizione di una connessione Γ^i a valori nell'algebra di Lie di P . Abbiamo dunque pronta la scena per una geometria alla Poincaré. Tuttavia l'azione è data da:

$$(28) \quad \text{azione} = \frac{-1}{32\pi G} \int R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}$$

che riproduce sia la (25) che la (21), variando indipendentemente le e^a e le ω_b^a . L'azione (28) non è invariante rispetto a trasformazioni locali di Poincaré, ma

solamente rispetto al sottogruppo di quelle di Lorentz $e^a \rightarrow \Lambda^a_b e^b$. La natura ha dunque preparato un gruppo molto grande per poi ridurlo all'atto di scrivere le equazioni di campo. In modo simile la simmetria di $GL(4, R)$ che appare nella formulazione solita della relatività generale è illusoria e rimane solamente quella di $SO(3,1)$. Non è improbabile che queste rotture provengano da un meccanismo di Higgs e che le formulazioni in nostro possesso siano versioni mutilate di quella completa. I prossimi dieci anni vedranno molto probabilmente dei progressi fondamentali in questa direzione e non è escluso che finalmente emergano schemi generalissimi secondo la visione originale di Einstein.

REMO RUFFINI

**RELATIVITA' GENERALE:
DALLA COSMOLOGIA ALLA FISICA DELLA GALASSIA.**

(Conferenza non pervenuta)



COMUNICAZIONI



GIUSEPPE ARCIDIACONO (*)

L'UNIVERSO DI DE SITTER E LA RELATIVITA' PROIETTIVA.

1. Premessa.

E' noto che nella cosmologia relativista i modelli di Universo sono costruiti a partire dalle equazioni gravitazionali di Einstein. Una nuova via è stata indicata nel 1952 da L. Fantappié [1], ed è basata su una estensione alla fisica del Programma di Erlangen di Klein. Ad ogni gruppo corrisponde un modello di Universo, le cui leggi possono essere determinate a partire dal gruppo stesso. Successivamente ho fatto vedere che i gruppi delle rotazioni R_{n+1} ($n = 3, 4 \dots$) hanno particolare importanza in fisica e ad essi corrispondono dei modelli di Universo «ipersferici» $S_3, S_4 \dots S_n$, ognuno dei quali contiene i precedenti ed è contenuto nei successivi cioè disposti in ordine «gerarchico» [2].

2. Il gruppo di Fantappié e la Cosmologia.

Per $n = 4$ si ottiene il modello di Universo di De Sitter S_4 a curvatura costante $+1/r^2$, che perfeziona nel modo più semplice il cronotopo di Minkowski. Per studiare tale modello con i metodi della relatività ristretta, ho osservato che esso apparirà ai suoi osservatori come se fosse piatto, ed occorre allora utilizzare la sua «rappresentazione geodetica» di Beltrami, nella quale le geodetiche di S_4 sono rappresentate dalle rette del suo spazio proiettivo tangente P_4 (cronotopo di Castelnuovo), formato dai punti esterni all'assoluto di Cayley-Klein di equazione

$$(1) \quad A^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 + r^2 = 0$$

Mentre l'Universo di De Sitter è finito nello spazio ed infinito nel tempo, l'opposto accade per il cronotopo di Castelnuovo. Le rotazioni R_5 a 10 parametri, che mutano in sé l'Universo di De Sitter, inducono sullo spazio tangente

(*) Istituto Matematico, Università di Perugia.

le proiettività che mutano in sé l'assoluto (1). Nel caso di un parametro e di due variabili (x, t) , tali proiettività sono le traslazioni spaziali di parametro T (con $\alpha = T/r$) [3]:

$$(2) \quad x' = (x + T)/(1 - \alpha x/r); \quad t' = t \sqrt{1 + \alpha^2}/(1 - \alpha x/r)$$

e le traslazioni temporali di parametro T_0 (con $\gamma = T_0/t_0$ e $t_0 = r/c$)

$$(3) \quad x' = x \sqrt{1 - \gamma^2}/(1 + \gamma t/t_0); \quad t' = (t + T_0)/(1 + \gamma t/t_0)$$

Da esse segue una legge di addizione delle durate simile a quella delle velocità di Einstein, con comparsa di una durata limite t_0 (età dell'Universo).

Si ricava poi la legge di espansione cosmica

$$(4) \quad V = x/(t + t_0) \quad \text{ovvero} \quad \beta = \alpha/(1 + \gamma)$$

e si può dimostrare che su scala cosmica, la legge del red-shift è quella classica $z = \beta$. Sono quindi possibili velocità iper- c .

3. La meccanica «proiettiva».

Nel cronotopo di Castelnuovo vale la metrica di Beltrami

$$(5) \quad A^4 ds^2 = A^2(dx_i dx_i) - (x_i dx_i/r)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, 4)$$

Passando alle coordinate proiettive $\bar{x}_A$ ($A = 0, 1, 2, \dots, 4$) normalizzate con la condizione $\bar{x}_A \bar{x}_A = r^2$, la (5) si riduce alla metrica Pitagorica, ed il legame tra le coordinate proiettive e quelle cartesiane è dato da

$$(6) \quad \bar{x}_0 = r/A; \quad \bar{x}_i = x_i/A \quad \text{e viceversa} \quad x_i = r \bar{x}_i/\bar{x}_0$$

A partire dalla (5) si può introdurre un «tempo proprio» ed una velocità proiettiva data da $\bar{u}_A = d\bar{x}_A/d\tau$, da cui segue che $\bar{u}_A \bar{u}_A = -c^2$ ed $\bar{u}_A \bar{x}_A = 0$.

Vale allora la nuova legge di variazione della massa, che nel caso di due dimensioni (x, t) e ponendo $\alpha = x/r$, $\beta = V/c$ e $\gamma = t/t_0$, si riduce alla

$$(7) \quad m = m_0 (1 + \alpha^2 - \gamma^2) / \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}$$

Nella relatività proiettiva il momento lineare e quello angolare formano un unico tensore, da cui segue una equivalenza tra la massa (m_0) ed il momento polare di inerzia (I), data da $I = m_0 r^2$, analoga alla $E = m_0 c^2$.

4. Le equazioni di Maxwell e la magnetoidrodinamica.

E' noto che le equazioni di Maxwell sono strettamente connesse al gruppo di Lorentz ed al cronotopo di Minkowski. Nell'Universo di De Sitter, tali equa-

zioni vengono così generalizzate

$$(8) \quad \text{Rot } H_{AB} = J_{ABC}; \quad \text{Div } H_{AB} = I_A \quad (ABC = 0, 1 \dots 4)$$

Passando al limite per r infinito, esse si scompongono in due gruppi distinti

$$(9) \quad (I) \text{ Rot } H_{ik} = J_{ikl}; \quad \text{Div } H_{ik} = I_k;$$

$$(II) \text{ Rot } C_i = \Omega_{ik}; \quad \text{Div } C_i = \sigma$$

con $J_{ik0} = \Omega_{ik}$ ed $I_0 = \sigma$. Esse coincidono con le equazioni di Maxwell in presenza di monopoli magnetici (scritte in forma duale) e con le equazioni relativistiche del campo idrodinamico (con Ω_{ik} i vortici e σ le sorgenti).

Ne segue che le equazioni (8) sono quelle del campo magnetoidrodinamico H_{AB} , in accordo con il fatto che su scala cosmica la materia si trova allo stato di *plasma* (fluido elettrizzato) [4].

Se poi introduciamo la forza ponderomotrice

$$(10) \quad 2f_A = H_{BC} J_{ABC} - 2H_{AB} I_B$$

in base alle (8) avremo $f_A = \text{Div } T_{AB}$, dove T_{AB} è il tensore energetico del campo magnetoidrodinamico

$$(11) \quad T_{AB} = H_{AS} H_{SB} + (1/4) H_{RS} H_{RS} \delta_{AB}$$

Si ottiene così una nuova teoria del plasma, valida su scala cosmica.

5. Gli universi ipersferici multitemporali.

Passando ai successivi modelli di Universo $S_5, S_6 \dots S_n$, in essi appaiono 3 coordinate spaziali ed $n-3$ temporali. Per r infinito, ci riduciamo agli Universi di Kalitzin $E_5, E_6 \dots E_n$ euclidei, con $n-3$ tempi t_s ($s = 1, 2 \dots n-3$) ed $n-3$ costanti universali c_s , con la metrica [5]

$$(12) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_1^2 dt_1^2 - c_2^2 dt_2^2 - \dots - c_{n-3}^2 dt_{n-3}^2$$

Si possono allora introdurre $n-3$ tempi propri τ_s e le $n-3$ velocità tra loro ortogonali e normalizzate

$$(13) \quad u_i^{(s)} = dx_i/d\tau_s \quad \text{con} \quad u_i^{(r)} u_i^{(s)} = -c_s^2 \delta_{rs}$$

La relatività ristretta viene così generalizzata al caso n -dimensionale. Per dare una interpretazione fisica degli $n-3$ tempi, poniamo c_s infinito ed osserviamo che il gruppo di Galilei si può generalizzare così

$$(14) \quad x' = x + Vt + At^2/2! + \dots + Bt^{n-3}/(n-3)!; \quad t' = t$$

dove $A, \dots B$ sono le successive accelerazioni (costanti). Tale gruppo si può

linearizzare introducendo gli $n-3$ tempi così definiti

$$(15) \quad t_1 = t; \quad t_2 = t^2/2! \quad \dots \quad t_{n-3} = t^{n-3}/(n-3)!$$

ed allora esso diventa lineare

$$(16) \quad x' = x + Vt_1 + At_2 + \dots + Bt_{n-3}; \quad t'_s = t_s$$

Per tale via si può costruire una fisica invariante per i moti non uniformi. In particolare, per $n = 5$, otteniamo la «relatività conforme» in cui intervengono i movimenti uniformemente accelerati. Il secondo tempo è dato dalla formula $t_2 = (c^2 t^2 - x^2)/2c^2$, che al limite classico si riduce a $t_2 = t^2/2!$. Con tale scala del tempo i movimenti iperbolici relativistici diventano uniformi.

Le corrispondenti equazioni di Maxwell generalizzate sono simili a quelle di H. C. Corben [6] e riuniscono in una teoria unica le leggi della magnetoidrodinamica e quelle della gravitazione. Si ottiene così una teoria unitaria della materia e dell'elettricità rimanendo entro lo schema grupale [7].

BIBLIOGRAFIA

- [1] FANTAPPIE' L., *Opere Scelte*, Ed. Unione Matematica Italiana, Bologna 1973; *Su una nuova teoria di relatività finale*, Rend. Accad. Lincei, 17, 158, (1975).
- [2] ARCIDIACONO G., *Relatività e Cosmologia*, Ed. Veschi, Roma, 1973; *Memorie su General Relativity and Gravitation del 1976-79*.
- [3] ARCIDIACONO G., *Memorie sui Rend. Accad. Lincei del 1955-56 e su Collectanea Mathematica (Barcelona) del 1958-79*.
- [4] ARCIDIACONO G., *Memorie su Urania (Madrid) del 1974-79*.
- [5] KALITZIN N., *Multitemporal theory of Relativity*, Academy of Sciences, Sofia 1975; ARCIDIACONO G., *Gli Universi ipersferici Multitemporali, la Cosmologia e le teorie unitarie*, Collectanea Mathematica (in corso di stampa).
- [6] CORBEN H. C., *A classical theory of electromagnetism and gravitation*, Phys. Rev. 69, 225, (1946).
- [7] L'Universo di De Sitter ed il gruppo di Fantappiè sono stati utilizzati recentemente per spiegare la struttura interna dell'elettrone, concepito come un micro-Universo pulsante, vedi P. CALDIROLA, *On a model of the relativistic electron deriving from the introduction of the chronon*, Lett. Nuovo Cimento, 23, 83 (1978); vedi pure J. CHARON, *La relativité complexe*, Albin Michel, Paris 1977; P. CALDIROLA, M. PAVSIC, E. RECAMI, *Explaining the large numbers by a hierarchy of «Universes»: a unified theory of strong and gravitational interactions*, Nuovo Cimento, 48B, 205-271 (1978); R. MIGNANI, *Instability of invariance groups of space-time, group contractions and models of Universe*, Lett. Nuovo Cimento, 22 349 (1978).

FRANCO BAMPI (*)

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA CONDIZIONE DI SHEARFREE NEL TEOREMA DI ROBINSON.

Abstract.

An analysis of Robinson's Theorem is given: in particular it is shown that the shearfree condition is necessary and sufficient in order that the nullity conditions (i.e. the radiations conditions in the far zone for an electromagnetic field) be preserved along the rays of a null geodesic congruence.

Si consideri, nello spazio-tempo V_4 , una congruenza Ξ di linee *nulle* e si indichi con $k = k^i \partial / \partial x^i$ ($i = 0, \dots, 3$) il campo vettoriale tangente alle curve di Ξ . Scelto un generico vettore v di tipo spazio soddisfacente $k \cdot v = 0$, si definisca il seguente bivettore nullo

$$(1) \quad F_{ij} = k_i v_j - k_j v_i$$

Il bivettore così ottenuto è detto essere *associato* alla congruenza Ξ e soddisfa le seguenti *condizioni di nullità*

$$(2) \quad F_{ij} F^{ij} = 0, \quad F_{ij} {}^* F^{ij} = 0,$$

ove, come al solito ${}^* F^{ij} = \epsilon^{ijk} F_{kr}$, ϵ^{ijk} essendo il tensore totalmente antisimmetrico di Ricci (per maggiori informazioni sui bivettori e sulle loro proprietà si veda, ad es., la ref. [1]).

Una interessante caratterizzazione delle congruenze nulle è fornita dal cosiddetto *Teorema di Robinson* [2]. Esso, nella formulazione di Pirani [3], asserisce che «una congruenza di curve nulle è geodetica e shearfree (1) se e solo se tra i bivettori nulli ad essa associati ve ne è almeno uno soluzione delle equazioni di Maxwell nel vuoto (senza sorgenti)», le quali hanno la ben nota forma

(*) Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

(1) Informazioni e commenti sui cosiddetti *scalari ottici* possono trovarsi, ad es., in [3] oppure in [1].

$$(3) \quad F_{;j}^{ij} = 0, \quad {}^*F_{;j}^{ij} = 0.$$

Il significato della condizione di geodeticità è stato largamente studiato in letteratura (si veda ad esempio [4, 5, 6]). Il principale risultato ottenuto è che questa condizione trova la sua naturale interpretazione come conseguenza *dinamica* delle equazioni evolutive. Infatti, tenuto conto della struttura algebrica del tensore energia impulso per un campo elettromagnetico nullo ossia $\tau_{ij} = \epsilon k_i k_j$ [5], le equazioni evolutive $\tau_{;j}^{ij} = 0$ porgono immediatamente la condizione di geodeticità per le linee di $\mathfrak{Z}$. Ciò consente di asserire che l'evoluzione di un campo elettromagnetico nullo è identica, da un punto di vista *idrodinamico*, a quella di un fluido incoerente di fotoni [6].

Vediamo ora di fornire una interpretazione della condizione di shearfree (per maggior dettagli formali si consulti la ref. [7]). A tale scopo, si introduca il bivettore nullo complesso

$$(4) \quad \mathcal{F}_{ij} = F_{ij} + i {}^*F_{ij}$$

Poiché $\mathcal{F}_{ij}$ è di tipo nullo esisterà un vettore complesso M tale che si abbia

$$(5) \quad \mathcal{F}_{ij} = k_i M_j - k_j M_i.$$

inoltre, per ogni scelta di un sistema di riferimento in V_4 [8, 9, 10, 11], è possibile scegliere il campo M in modo tale che risulti

$$(6) \quad M = E + iH,$$

ove E ed H sono rispettivamente il campo elettrico e magnetico *relativi* al riferimento considerato [6]. In termini dei campi E ed H le condizioni di nullità (2) diventano le ben note condizioni di radiazione per un campo elettromagnetico nella zona lontana (far zone), ossia

$$(7) \quad E \cdot H = 0, \quad E^2 - H^2 = 0.$$

Il ruolo puramente geometrico giocato dalla condizione di shearfree risulta allora completamente chiarito dal seguente

TEOREMA. *La condizione di shearfree serve a garantire che le condizioni di nullità (7) siano preservate lungo le linee di $\mathfrak{Z}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema consiste essenzialmente di due parti. Dapprima bisogna trascrivere le equazioni di Maxwell in una forma più conveniente. Tenuto conto della (5), le equazioni (7) porgono

$$(8) \quad [k, M] = \chi k - 2 \hat{\theta} M,$$

ove $[,]$ è l'usuale parentesi di Lie [12] e $\chi = M_{;i}^i$, $\hat{\theta} = 1/2 k_{;i}^i$. Introdotto il campo vettoriale

$$(9) \quad \hat{M} = M e^{2\int \hat{\theta} d\xi}$$

essendo ξ un parametro lungo le curve di Ξ tale che $k(\xi) = 1$, la (8) diventa

$$(10) \quad [k, \hat{M}] = \chi e^{2\int \hat{\theta} d\xi} k$$

Posto $\hat{E} = \text{Re}(\hat{M})$, $\hat{H} = \text{Im}(\hat{M})$, le condizioni di nullità (7) porgono

$$(11) \quad \hat{E} \cdot \hat{H} = 0, \quad \hat{E}^2 - \hat{H}^2 = 0.$$

In secondo luogo, osserviamo che le equazioni di Maxwell nella forma (10) implicano che il campo $\hat{M}$ è un *vettore di connessione* (2) per la congruenza Ξ . L'asserto del teorema segue allora dal seguente

LEMMA. *Sia data una congruenza nulla geodetica Ξ con vettore tangente k e sia $\{k, n, m, \bar{m}\}$ una tetrad nulla associata al campo vettoriale k . Siano $\zeta_{(A)}$ ($A = 1, 2$) due vettori di connessione per i quali risulti*

$$(12) \quad \zeta_{(A)} \cdot k = \zeta_{(A)} \cdot n = 0.$$

La congruenza Ξ è shearfree se e solo se è possibile definire due vettori di connessione, soddisfacenti la (12), che siano ortogonali e di modulo uguale lungo le linee di Ξ .

La prova di questo lemma è data in [7].

BIBLIOGRAFIA

- [1] BAMPI F., CAVIGLIA G., MASSA E., ZORDAN G. (1976): *Bivettori Complessi in Relatività Generale*, Quaderni del Consiglio Nazionale delle ricerche, Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica.
- [2] ROBINSON I., (1961), J. Math. Phys. 2, 290.
- [3] PIRANI F. A. E., (1965): *Introduction to gravitational radiation theory*, in *Lectures on General Relativity* Brandais 1964 Summer Institute in Theoretical Physics, vol. I, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- [4] MARIOT L., (1954); Comptes Rendus 238, 2055.
- [5] SYNGE J. L. (1956); *Relativity: the Special Theory*, North Holland, Amsterdam.
- [6] BAMPI F., JACASSI P. (1977); Boll. UMI 14, 286.
- [7] BAMPI F. (1978); *The Shearfree Condition in Robinson's Theorem*, Gen. Rel. & Grav. 9, 779.
- [8] CATTANEO C. (1958); Nuovo Cimento 10, 318.
- [9] CATTANEO C. (1959); Ann. Mat. Pura Appl. 48, 361.
- [10] MASSA E. (1974); Gen. Rel. & Grav. 5, 555.

(2) Il concetto di vettore di connessione è ben noto in letteratura [3]; tuttavia qui è usato in una accezione più generale, coerentemente con la ref. [13].

- [11] MASSA E. (1974); *Gen. Rel. & Grav.* 5, 573.
- [12] STERNBERG S. (1964); *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- [13] MASSA E. (1978); *Relative Continuum Mechanics in General Relativity: Kinematical Foundation*, *Ann. Mat. Pura Appl. (IV)*, 117, 311.

SERGIO BENENTI

CONCETTI E RISULTATI PRINCIPALI
DELLA TEORIA DELLE STRUTTURE DI SEPARABILITA'
SU VARIETA' RIEMANNIANE.

La determinazione e lo studio delle geodetiche di una assegnata varietà riemanniana (V_n, g) , pur nella distinzione dovuta alla dimensione e alla segnatura, è un problema di comune interesse per la Relatività Generale e la Meccanica Analitica.

Dal punto di vista locale, assegnata cioè una carta (U, x^i) di (V_n, g) , il problema è riconducibile alle quadrature tramite l'integrazione per separazione delle variabili dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata:

$$(1) \quad g^{ij} \partial_i W \partial_j W = \text{cost.} \quad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \right),$$

cioè alla determinazione di un integrale completo somma di funzioni di una sola coordinata:

$$(2) \quad W = \sum_{i=1}^n W_i(x^i).$$

La ricerca di tutti i casi in cui ciò è possibile è un problema classico, sulla cui evoluzione non mi soffermo, rinviando per i dettagli alla prima parte della memoria [1]. Ricordo solamente che i risultati più significativi ed essenziali sono dovuti a lavori di Stäckel (1893) [2], Levi-Civita (1904) [3], Burgatti (1911) [4], Dall'Acqua (1912) [5], Agostinelli (1936-37) [6, 7], riguardanti non solo l'integrazione delle geodetiche ma anche le traiettorie di sistemi dinamici conservativi. Il caso di sistemi dinamici a vincoli dipendenti dal tempo è stato invece studiato più recentemente dal russo Iarov-Iarovoi (1963-64) [8], in tutta generalità.

Problematica comune a tutti questi lavori è stata la ricerca della forma più generale dei coefficienti g^{ij} limitatamente però a metriche definite positive.

Recentemente mi sono posto il problema di studiare la separabilità dell'equazione (1) da un punto di vista «geometrico», cioè di stabilire le proprietà locali di una varietà riemanniana che ammetta «carte separabili» cioè carte per cui

l'equazione (1) ammette integrali del tipo (2). A seguito dei primi risultati ottenuti nell'ambito di varietà a metrica definita [9, 10, 11], si è venuto a riconoscere il ruolo determinante e semplificante, nella complessa tematica della separabilità, dei concetti di «struttura di separabilità» e di «classe» di una struttura di separabilità. Su di essi mi tratterò ora brevemente, rimandando per le dimostrazioni ed ulteriori dettagli a lavori di prossima pubblicazione.

Per *varietà riemanniana* intendo una coppia (V_n, g) costituita da una varietà differenziabile V_n di dimensione n e di un tensore g differenziabile su V_n , doppio, covariante, simmetrico, non degenerare, senz'alcuna particolare assunzione sulla segnatura di g . Dico che (V_n, g) è una *varietà propriamente riemanniana* se la «metrica» g è definita (positiva), *varietà pseudo-riemanniana* se invece la metrica g è indefinita. Una *carta* di V_n è denotata con una coppia (U, x^i) dove $U \subseteq V_n$ e il dominio (aperto) e (x^i) (con $i = 1, 2, \dots, n$) l'insieme delle funzioni coordinate. Diciamo che (U, x^i) è una carta in $x_0 \in V_n$ se $x_0 \in U$. Sottintendo ovviamente le solite notazioni e convenzioni, proprie della geometria riemanniana.

DEFINIZIONE 1. Sia (V_n, g) una varietà riemanniana. Una carta (U, x^i) di V_n è detta *separabile* se l'equazione (1) ammette un integrale completo del tipo (2); le (x^i) sono dette *coordinate separabili*.

DEFINIZIONE 2. Siano (U, x^i) e $(U', x^{i'})$ due carte separabili in un punto x_0 di una varietà riemanniana (V_n, g) . Esse si dicono *$\mathcal{S}$ -compatibili* (in x_0) se esiste un aperto $U'' \subseteq U \cap U'$ contenente x_0 in cui i corrispondenti integrali (2) coincidono.

PROPOSIZIONE 1. La $\mathcal{S}$ -compatibilità è una relazione di equivalenza nella famiglia delle carte separabili in un punto x_0 di una varietà riemanniana.

DEFINIZIONE 3. Sia x_0 un punto di una varietà riemanniana (V_n, g) . Una *struttura di separabilità* in x_0 (brevemente: una *$\mathcal{S}$ -struttura* in x_0) è una classe di equivalenza di carte $\mathcal{S}$ -compatibili in x_0 . Una $\mathcal{S}$ -struttura in x_0 è detta di *classe r* (brevemente: una *$\mathcal{S}_r$ -struttura*) se r ($0 \leq r \leq n$) è il numero massimo di coordinate ignorabili contenute in ogni carta della $\mathcal{S}$ -struttura. Una carta di una $\mathcal{S}_r$ -struttura in cui il numero massimo r di coordinate ignorabili è raggiunto è detta *carta separabile quasi-normale*.

A titolo di esempio osservo che in ogni punto del piano euclideo esistono quattro tipi di $\mathcal{S}$ -strutture, di classe 2, 1 e 0. Le $\mathcal{S}_2$ -strutture hanno come

coordinate quasi-normali le coordinate cartesiane (anche non ortogonali); le $\mathcal{S}_1$ -strutture hanno tra le coordinate quasi-normali, in particolare, le coordinate polari. Vi sono poi due tipi di $\mathcal{S}_0$ -strutture, caratterizzate una dalle coordinate paraboliche confocali e l'altra dalle coordinate ellittico-iperboliche confocali (per il loro uso in meccanica analitica si veda ad es. [12], §§ 17.9, 17.10).

Formulate le precedenti definizioni, la chiave di volta per l'analisi delle strutture di separabilità consiste nella dimostrazione dell'esistenza, fra le carte separabili quasi-normali di una $\mathcal{S}_r$ -struttura, di particolari carte, tramite le quali si rende più semplice possibile non solo l'integrazione dell'equazione (1), ma anche la determinazione della forma generale della metrica e delle proprietà geometriche locali della varietà.

Una tale analisi si è per ora completata solo nel caso di varietà propriamente riemanniane, per le quali, attraverso considerazioni che traggono in gran parte ispirazione a fondamentali osservazioni di Levi-Civita, si giunge a enunciare i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. In una $\mathcal{S}_r$ -struttura in un punto x_0 di una varietà propriamente riemanniana (V_n, g) esistono carte (U, y^i) con r coordinate ignorabili (y^α) ($\alpha = n - r + 1, \dots, n$) tali che le componenti del tensore metrico g^{ij} soddisfano alle condizioni

$$(3) \quad g^{aj} = 0 \quad (\text{con } a \neq j)$$

dove $a = 1, \dots, n - r$ e $j = 1, \dots, n$. Tali carte (risp. coordinate) sono dette *carte* (risp. coordinate) *separabili normali*.

Viceversa se una carta separabile (U, y^i) soddisfa alle condizioni suddette allora essa è una carta separabile quasi-normale di una $\mathcal{S}_r$ -struttura, nel senso che non esiste nessuna carta $\mathcal{S}$ -compatibile con un numero di coordinate ignorabili maggiore di r , purché le (y^a) siano coordinate di *seconda specie* (1).

TEOREMA 2. Sia (U, y^i) una carta separabile normale in un punto x_0 di una varietà propriamente riemanniana (V_n, g) con coordinate ignorabili (y^α) ($\alpha = n - r + 1, \dots, n$). Se (U, x^i) è una carta $\mathcal{S}$ -compatibile con (U, y^i) in x_0 allora, a parte un cambiamento di scala delle coordinate (y^a) ($a = 1, \dots, n - r$) e un riordinamento delle coordinate (x^i) , sussistono necessariamente relazioni del tipo:

$$(4) \quad dy^a = dx^a, \quad dy^\alpha = \xi_i^\alpha dx^i,$$

(1) Una coordinata y^i è detta di *prima specie* se $\partial_i g_{hk} = 0$ per $h, k \neq i$; altrimenti è detta di *seconda specie* (cfr. [3], [5]). Le coordinate ignorabili sono ovviamente di prima specie.

dove ogni ξ_i^α è funzione della sola x^i .

Il Teorema 2 fornisce in sostanza il tipo di legame tra coordinate separabili generiche e coordinate separabili normali e quindi, immediatamente, il tipo di relazione intercorrente tra le componenti del tensore metrico nei due sistemi di coordinate. Poiché è estremamente semplice, applicando con un semplice artificio il teorema di Stäckel, determinare la forma generale delle componenti del tensore metrico in coordinate separabili normali, si trova immediatamente, tramite le suddette relazioni, la forma generale del tensore metrico in coordinate separabili generiche. Il risultato è espresso dai seguenti teoremi.

TEOREMA 3. Le componenti g^{ij} del tensore metrico di una varietà propriamente riemanniana (V_n, g) in una carta separabile normale (U, y^i) di una $\mathcal{S}_r$ -struttura assumono la forma seguente.

$$(5) \quad g^{aa} = u_m^a, \quad g^{a\beta} = u_m^a \xi_a^{\alpha\beta}, \quad g^{ai} = 0 \quad (a \neq i)$$

(con: $a = 1, \dots, m$; $\alpha, \beta = m+1, \dots, n$; $i = 1, \dots, n$; $m = n-r$) dove: (u_m^a) è l' m -sima riga di una matrice regolare $m \times m$ $\mathcal{U} = \|u_b^a\|$ di inversa $\mathcal{U}^{-1} = \|u_a^b\|$; u_a^b e $\xi_a^{\alpha\beta}$ sono funzioni di y^a soltanto.

TEOREMA 4. Le componenti g^{ij} del tensore metrico di una varietà propriamente riemanniana (V_n, g) in una carta separabile (U, x^i) appartenente ad una $\mathcal{S}_r$ -struttura possono sempre porsi nella forma seguente:

$$(6) \quad \begin{cases} g^{aa} = u_m^a, \quad g^{ab} = 0 \quad (a \neq b), \\ g^{a\alpha} = \xi_\beta^\alpha \xi_a^\beta u_m^a \quad (2) \\ g^{\alpha\beta} = \xi_\mu^\alpha \xi_\nu^\beta (\xi_a^{\mu\nu} + \xi_a^\mu \xi_a^\nu) u_m^a \end{cases}$$

(con $a, b = 1, \dots, m$; $\alpha, \beta, \mu, \nu = m+1, \dots, n$; $m = n-r$) dove: (u_m^a) è l' m -sima riga di una matrice regolare $m \times m$ $\mathcal{U} = \|u_b^a\|$ di inversa $\mathcal{U}^{-1} = \|u_a^b\|$; le funzioni eq formano una matrice regolare $r \times r$ $\Xi = \|\xi_\beta^\alpha\|$ di inversa $\Xi^{-1} = \|\xi_\alpha^\beta\|$; le funzioni $u_a^b, \xi_a^\alpha, \xi_a^\mu$ e ξ_β^α dipendono soltanto dalla coordinata corrispondente all'indice in basso.

Devo osservare a proposito del Teorema 4, che esistono in letteratura espressioni del tensore metrico apparentemente più generali delle (6), perché più complesse: tutte quante però si riducono, con opportune trasformazioni, alle (6) (o addirittura a casi particolari), che rappresentano la soluzione del problema di Levi-Civita nella forma più semplice possibile. A titolo di curiosità ho fatto

(2) Senza somma sull'indice ripetuto a .

vedere in [10] come possono darsi un numero infinito, cioè una per ogni intero $N \geq m$, di distinte rappresentazioni del tensore metrico in coordinate separabili.

Stabilito il Teorema 3, è immediato verificare che oltre agli r integrali primi lineari nei momenti: $p_\alpha = \text{cost.}$, dovuti all'esistenza delle r coordinate ignorabili (y^α), esistono altri $n-r$ integrali primi (k_b) quadratici, determinabili a partire dalla conoscenza della matrice $\mathcal{U}$ e dei coefficienti $\zeta_a^{\alpha\beta}$ che compaiono nell'enunciato:

$$(7) \quad k_b = u_b^a (p_a^2 + \zeta_a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta).$$

Essi risultano tutti essere in involuzione. Ovviamente $k_m = g^{ij} p_i p_j$.

Questa osservazione consente di stabilire teoremi sulle proprietà locali delle varietà riemanniane che ammettono una $\mathcal{S}$ -struttura, e che, non escludendo possibili raffinamenti e differenti formulazioni, possono essere enunciati, nella loro maniera più semplice, come segue.

TEOREMA 5. In un punto x_0 di una varietà propriamente riemanniana (V_n, g) esiste una $\mathcal{S}_r$ -struttura solo se in un intorno di x_0 esistono r vettori di Killing (X_α) e $n-r$ tensori doppi di Killing (K_α) verticalmente indipendenti e permutabili (nell'algebra di Schouten), nonché $n-r$ autovettori comuni (X_α) dei tensori (K_α), permutabili e ortogonali tra loro e coi vettori di Killing (X_α).

L'insieme degli n vettori permutabili e indipendenti (X_α, X_α) fornisce un riferimento naturale le cui coordinate associate (y^α, y^α) sono coordinate separabili normali. Essi, come i tensori di Killing, non sono ovviamente determinati univocamente, ma a meno di opportune trasformazioni, facilmente determinabili. Per esempio si può fare in modo che tra i tensori di Killing soddisfacenti l'enunciato rientri lo stesso tensore metrico g . Ciò che in generale non si può ottenere e che anche gli r vettori di Killing, i quali determinano sottovarietà piatte di (V_n, g) , risultino in tutto il loro campo di definizione mutuamente ortogonali. Le $\mathcal{S}$ -strutture per cui ciò avviene sono state chiamate *strutture di separabilità ortogonali*.

TEOREMA 6. In un punto x_0 di una varietà propriamente riemanniana (V_n, g) esiste una $\mathcal{S}_r$ -struttura se e solo se in un aperto U contenente x_0 : i) opera, senza punti fissi eccetto che per l'identità, un gruppo abeliano di movimenti a r parametri G_r ; ii) il fogliettamento delle varietà integrali (W_r) di G_r , che sono piatte nella metrica indotta da g , ammette un fogliettamento complementare e ortogonale (Z_{n-r}); iii) le varietà isometriche (Z_{n-r}) ammettono una struttura di separabilità ortogonale nella metrica indotta da g ; iv) in un qualunque sistema di coordinate $(x^i) = (x^a, x^\alpha)$ ($a = 1, 2, \dots, n-r; \alpha = n-r+1, \dots, n$) definito in U da coordinate separabili ortogonali (x^a) in una Z_{n-r} e da coordinate cartesiane (x^α) in una W_r , le componenti g^{ij} del tensore metrico soddisfano alle

condizioni

$$(8) \quad g^{aa} g^{bb} \partial_a \partial_b g^{\alpha\beta} - g^{aa} \partial_a g^{bb} \partial_b g^{\alpha\beta} - g^{bb} \partial_b g^{aa} \partial_a g^{\alpha\beta} = 0 \quad (a \neq b)^{(3)};$$

v) k coordinate (x^a) sono di seconda specie.

Come si può vedere le condizioni «geometriche» imposte dall'esistenza di coordinate separabili sono piuttosto «forti». La possibilità di integrare per separazione di variabili l'equazione delle geodetiche di una varietà riemanniana appare quindi piuttosto «rara».

Qual è invece la situazione nel caso di varietà pseudo-riemanniane? Non esiste ancora una risposta esauriente a tale domanda. Si conoscono esempi (forniti appunto dalla Relatività Generale) per cui valgono le proprietà ora viste per metriche definite: strutture di separabilità di questo tipo possono quindi chiamarsi *regolari*. Si conoscono però altri esempi che non sembrano rientrare in tale schema: sono i casi in cui le «orbite» del gruppo G_r sono a metrica degenerare. Strutture di separabilità di questo tipo possono quindi chiamarsi *degeneri*. Va detto però che una struttura di separabilità può essere solo apparentemente degenerare, nel senso che l'esistenza di un G_r a orbite degeneri può in realtà preludere all'esistenza di una struttura di separabilità regolare di classe superiore ad r .

Per le ristrettezze di spazio non posso dilungarmi sulle possibili applicazioni che i risultati esposti possono avere in Relatività Generale, del resto facilmente intuibili. Una delle prime è la sistemazione organica di numerose (il più delle volte frammentarie) osservazioni apparse nella letteratura, a partire da ben noti lavori di B. Carter (1868-69), sulla separabilità dell'equazioni delle geodetiche in spazi tempi, sulla esistenza di vettori e tensori di Killing, ecc. Per questo rimando alla seconda parte della già citata memoria [1].

Mi limito qui solo ad accennare che si stanno studiando le proprietà degli spazi-tempi con strutture di separabilità di classe 2 e 1. Risultati già ottenuti in questo campo riguardano le possibili specializzazioni della forma (5) del tensore metrico nel caso di $\mathcal{S}_{n-r}$ -strutture [13] e di $\mathcal{S}_{n-3}$ -strutture [14] su varietà n -dimensionali, cioè l'assegnazione di *forme canoniche* per le componenti del tensore metrico in coordinate separabili normali. L'assegnazione di tali forme canoniche consente, come prima applicazione, di determinare con un metodo «algebrico» i tensori di Killing (cioè gli integrali primi quadratici) non banali afferenti alla $\mathcal{S}$ -struttura, e quindi di determinare nuove «costanti di moto»

(3) Senza somma sugli indici ripetuti a e b .

talvolta non prive di significato fisico: esempio ormai classico è quello della costante di Carter nella metrica di Kerr, che, in conseguenza di un teorema sulle $\mathcal{S}_{n-r}$ -strutture [13], è determinabile «a colpo d'occhio» direttamente dalla matrice dei coefficienti della metrica.

Per questa via (altro esempio) si sono determinati due integrali primi quadratici per la metrica di Robertson-Walker [14], attualmente allo studio.

Recenti ricerche di M. Francaviglia e M. Demianski [15], [16] hanno poi messo in luce numerosi e notevoli proprietà degli spazi di tipo D dal punto di vista dell'esistenza di strutture di separabilità di classe 2.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BENENTI S. e FRANCAVIGLIA M., *The theory of separability of the Hamilton-Jacobi equation and its application to General Relativity*, Einstein Centennial Volumes, A. Held Ed. (Plenum, N.Y., in corso di stampa).
- [2] STACKEL P., Math. Ann. 42, 537-563 (1904).
- [3] LEVI-CIVITA T., Math. Ann. 59, 383-397 (1904).
- [4] BURGATTI P., Rend. Acc. Naz. Lincei 20, 108-111 (1911).
- [5] DALL'ACQUA A., Rend. Circ. Mat. Palermo 33, 341-351 (1912).
- [6] AGOSTINELLI C., Mem. R. Acc. Scienze Torino 69, 1-54 (1937).
- [7] AGOSTINELLI C., Atti R. Ist. Veneto Sc. Lett. Arti 94, 151-161 (1936-37).
- [8] IAROV-IAROV M. S., P. M. M. 27, 973-987 (1963), idem J. Appl. Math. Mech. 27, 1499-1519 (1964).
- [9] BENENTI S., C.R.A.S. Paris 283, 215-218 (1976).
- [10] BENENTI S., Rep. Math. Phys. 12, 311-316 (1977).
- [11] BENENTI S., Rend. Mat. Univ. Politec. Torino 34, 431-463 (1975-76).
- [12] PARS L. A., *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann (1965).
- [13] BENENTI S. e FRANCAVIGLIA M., *Remarks on certain separability structures and their applications to General Relativity*, in pubblicazione sul GRG Journal.
- [14] DEMIANSKI M. e FRANCAVIGLIA M., *Type-D space-times with a Killing tensor*, preprint.
- [15] BENENTI S. e FRANCAVIGLIA M., *Canonical forms for $\mathcal{S}_{n-3}$ -structures in pseudo-Riemannian manifolds*, presentato agli A.I.M.P.
- [16] DEMIANSKI M. e FRANCAVIGLIA M., *Separability structures and Killing-Yano tensors in non-accelerating type-D space-times*, preprint.



M. CALVANI (*), R. CATENACCI (**), F. SALMISTRARO (**)

FORMULA DI MASSA E TRASFORMAZIONI IN METRICHE CON SINGOLARITA' NUDE.

Abstract.

By a direct examination of test particle orbits we give for the odd- δ T - S metrics a definition of irreducible mass and unincreasable angular momentum; their expression turns out to be the same for all the members of the family. Processes on the outer and inner local horizons are described with the corresponding area's variations.

Nello studio dei processi energetici dei black-holes ha trovato un importante e fecondo ruolo il concetto di massa irriducibile (1, 2), che sorge naturalmente quando vengono presi in esame i processi che avvengono sull'orizzonte.

Approcci di natura sostanzialmente diversa hanno infatti messo in luce la profonda connessione esistente tra quest'ultima, la legge dell'area (3, 4) (seconda legge dei black-holes) e la definizione di entropia (vedi ad es. 5, 6, 7). Recentemente, inoltre, trasformazioni cosiddette «isoreali» coinvolgenti i parametri sull'orizzonte interno sono state introdotte per i black-holes di Kerr (8, 9). Sorge quindi immediato il problema di estendere a metriche diverse da quella di Kerr una analisi che metta in luce eventuali nuovi aspetti o analogie coi risultati già noti.

In questo lavoro si prende in esame una famiglia di soluzioni stazionarie e a simmetria assiale delle equazioni di Einstein, quella di Tomimatsu-Sato [10, 11, 12], che è caratterizzata principalmente dalla presenza di singolarità nude situate all'esterno di una superficie con le proprietà locali di un orizzonte.

Le equazioni geodetiche conducono ad una equazione quadratica nell'energia che permette di distinguere i processi su tale superficie in due classi: quelli reversibili, per i quali le soluzioni formali E_+ ed E_- coincidono e corrispondono a

(*) Istituto di Astronomia dell'Università di Padova.

(**) Istituto di Fisica Teorica dell'Università di Pavia; Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Pavia.

stati di energia minima e quelli irreversibili, per i quali esiste un salto tra i due «mari» energetici [1, 2].

Come vedremo, la presenza di singolarità nude è evidenziata dalla diversa natura di tali trasformazioni nei vari casi.

Il punto di partenza è costituito dall'elemento di linea stazionario e a simmetria assiale:

$$(1) \quad ds^2 = f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] - f(dt - \omega d\varphi)^2$$

con f , ω , γ funzioni solo di ρ e z . Come è noto, le equazioni di Einstein nel vuoto si possono ridurre alle equazioni di Ernst [13, 14]:

$$(2) \quad (\xi \xi^* - 1) \nabla^2 \xi = 2 \xi^* \nabla \xi \cdot \nabla \xi$$

dove ξ è un potenziale complesso generato da f e da una funzione complessa ψ definita dalle equazioni:

$$(3) \quad \nabla \psi = -\rho^{-1} f^2 n \wedge \nabla \omega$$

$$(4) \quad \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = f + i\psi$$

Le soluzioni T - S si ottengono scrivendo ξ come rapporto di due polinomi complessi nelle variabili prolate sferoidali x e y date da:

$$(5) \quad \begin{aligned} \rho &= k(x^2 - 1)^{1/2} (1 - y^2)^{1/2} \\ z &= kxy \end{aligned}$$

Le espressioni esplicite di f e ω sono allora:

$$(6) \quad f = \frac{A}{B} \quad \omega = \frac{2mq}{A} (1 - y^2) C$$

dove A , B , C sono polinomi in x e y rispettivamente di grado $2\delta^2$, $2\delta^2$ e $2\delta^2 - 1$. Detti a ed m il momento angolare specifico e la massa della sorgente, i parametri che intervengono nel tensore metrico sono dati da $q = a/m$, $p = (1 - q^2)^{1/2}$ e l'intero δ , che diventa un parametro di distorsione legato al momento di quadrupolo. La famiglia di soluzioni così ottenuta contiene la metrica di Kerr come caso particolare ($\delta = 1$).

Per $q < 1$ la struttura degli spazi-tempo T - S è descritta principalmente dalle seguenti proprietà:

- a) per δ dispari le superfici $x = \pm 1$ sono orizzonti locali (11).
- b) Vi sono 2δ ergosuperfici con equazione $A = 0$.
- c) Vi sono δ singolarità ad anello sul piano equatoriale date dalla equazione $B = 0$.

d) Per $\delta > 1$ vi sono singolarità esterne alla superficie $x = 1$. Conviene osservare che la proprietà a) rende interessanti per i nostri scopi solo le metriche con δ dispari.

L'equazione di Hamilton-Jacobi per il moto geodetico fornisce un valore dell'energia della particella attraverso le coordinate (x, y) , i momenti p^x, p^y e le costanti del moto μ (massa a riposo) ed l (componente del momento angolare rispetto all'asse di simmetria) dato da:

$$(7) \quad E_{\pm} = \frac{-g_{\varphi t} l \pm [A(l^2 + g_{\varphi\varphi} F)]^{1/2}}{g_{\varphi\varphi}}$$

con

$$(8) \quad \begin{aligned} A &= g_{\varphi t}^2 - g_{tt} g_{\varphi\varphi} \\ F &= g_{xx}(p^x)^2 + g_{yy}(p^y)^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

Nella (7) gli stati fisici corrispondono alla radice E_+ . Dalla (7) si ottiene un'espressione per E_{min} su $x = 1$ indipendente da δ data da:

$$(9) \quad E_{min} = \frac{l(1-p)}{2q}$$

L'integrazione della forma infinitesima della (9) conduce alla relazione:

$$(10) \quad m^2 = m_{ir}^2 + \frac{L^2}{4m_{ir}^2} \quad m^2 \leq 2m_{ir}^2$$

con

$$m_{ir} = m \left(\frac{p+1}{2} \right)^{1/2}$$

nota come formula di massa, già trovata per la metrica di Kerr (1). Nella (10) $L = am$ è il momento angolare totale della sorgente mentre m_{ir} costituisce quel contributo alla massa che non può essere diminuito da estrazione di energia rotazionale e viene pertanto chiamata massa irriducibile.

Conseguenza immediata della (9) è infatti la legge:

$$(11) \quad dm_{ir} \geq 0$$

nella quale il segno di uguaglianza vale solo per trasformazioni reversibili. Il ruolo che questa grandezza ha nei processi sull'orizzonte esterno è chiarito dalla seguente relazione:

$$(12) \quad A_+ = \frac{16\pi}{\delta} \left(\frac{q}{p} \right)^{\delta-1} m_{ir}^2$$

in cui si è indicata con A_+ l'area della superficie $x = 1$. Risulta evidente dalla (12) che per $\delta > 1$ le trasformazioni reversibili non coincidono più con trasformazioni isoareali. In particolare si ottiene $dA > 0$ o $dA < 0$ in corrispondenza a variazioni positive o negative della massa m .

A tale proposito conviene osservare che la presenza di singolarità nude per $\delta > 1$ non consente di interpretare tale risultato come una violazione della legge dell'area.

In analogia con (8, 9) l'analisi precedente può essere facilmente applicata anche alle trasformazioni che interessano l'orizzonte interno ($x = -1$) e conduce ad una estensione della formula di massa a valori $m^2 \geq 2m_{ir}^2$.

$$(13) \quad m^2 = \beta + \frac{L^2}{4\beta} \quad m^2 \geq 2\beta$$

con

$$(14) \quad \beta = m^2 \frac{(1-p)}{2}$$

L'equazione per l'energia vincola in questo caso le variazioni della grandezza β alla seguente legge:

$$(15) \quad d\beta \leq 0$$

e permette quindi di interpretare in accordo con la (14) 2β come quel momento angolare massimo che non può essere aumentato da processi che avvengono esclusivamente sull'orizzonte interno, generalizzando così i risultati già ottenuti in (15).

In questo caso l'area della superficie $x = -1$ è legata a dalla relazione:

$$(16) \quad A_- = \frac{16\pi}{\delta} \left(\frac{q}{p} \right)^{\delta-1} \beta$$

e per questa valgono considerazioni analoghe a quelle sviluppate per la (12).

Maggiori dettagli potranno essere trovati in (16, 17) e referenze citate.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CHRISTODOULOU D.: Phys. Rev. Lett. 25, 1569 (1970).
- [2] CHRISTODOULOU D. e RUFFINI R.: Phys. Rev. D4, 3552 (1971).

- [3] HAWKING S. W.: *Phys. Rev. Lett.* 26, 1344 (1971).
- [4] HAWKING S. W.: *Commun. Math. Phys.* 25, 152 (1972).
- [5] SCIAMA D. W.: *Vistas in Astronomy*, 19, 385 (1976).
- [6] FROLOV V. P.: *Sov. Phys. Usp.* 19, 244 (1976).
- [7] HAWKING S. W.: *Phys. Rev. D* 13, 191 (1976).
- [8] CURIR A., FRANCAVIGLIA M.: *Rend. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sc., LXI, Ser. VIII, (5)*, 448-454 (1976).
- [9] CURIR A., FRANCAVIGLIA M.: *Acta Phys. Polonica B* 9, (1), 1-10, (1978).
- [10] TOMIMATSU A. e SATO H.: *Progr. Theor. Phys.* 50, 95 (1973).
- [11] TOMIMATSU A. e SATO H.: *Lettere al Nuovo Cimento* 8, 740 (1973).
- [12] SATO H.: Preprint per il «Centenario della nascita di Einstein» edito dalla Accademia Nazionale dei Lincei.
- [13] ERNST F. J.: *Phys. Rev.* 167, 1175 (1968).
- [14] ERNST F. J.: *J. Math. Phys.* 15, 1409 (1974).
- [15] CALVANI M., FRANCAVIGLIA M.: *Acta Phys. Polonica B* 9, (1), 11-14, (1978).
- [16] CALVANI M., CATENACCI R. e SALMISTRARO F.: *Lettere al Nuovo Cimento* 23, 260 (1978).
- [17] CALVANI M., SALMISTRARO F. e CATENACCI R.: *G.R.G.* 10, 35, (1979).



C. CASTAGNOLI (*), P. GALEOTTI (*), L. PERIALE (*), O. SAAVEDRA (*)

RIVELAZIONE DEI NEUTRINI EMESSI DURANTE IL COLLASSO GRAVITAZIONALE DI UN CORE STELLARE.

Abstract.

We discuss the present situation of the experiments for detection of cosmic neutrinos and their future developments. In particular, we describe our Mt. Blanc 100 ton new experiment and the 350 ton detector in Brasil, which will be realized with the cooperation of our group.

Il collasso gravitazionale di un core stellare costituisce uno dei meccanismi più energetici di emissione neutrinica; il flusso a Terra in neutrini emessi da sorgenti galattiche alla distanza d è infatti

$$F_{\nu} = 10^8 \left(\frac{d}{kpc} \right)^{-2} \left(\frac{E}{10^{52} \text{ erg}} \right) \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ ster}^{-1}$$

(Wheeler, 1976). Questo risultato è ottenuto dai diversi modelli teorici che sono stati proposti per interpretare le fasi finali di stelle di massa $M \gtrsim 10 M_{\odot}$, che evolvono verso il collasso gravitazionale attraverso la fase di formazione di un core di Fe-Ni. Gallino e Masani (1977) hanno recentemente analizzato i diversi processi caratteristici delle fasi finali della evoluzione stellare e dell'emissione neutrinica corrispondente.

Tutti i modelli teorici sono concordi nell'attribuire un ruolo fondamentale all'emissione di neutrini nella fase di collasso gravitazionale, durante la quale circa il 10% della massa del core viene emessa sotto forma di neutrini, di energia media $\langle E_{\nu} \rangle = 15\text{-}20 \text{ MeV}$, per un totale di circa $10^{53} - 10^{54} \text{ erg}$ di energia liberata in neutrini. Tra i modelli proposti, tuttavia, non esiste un accordo sulla dinamica del collasso né sulle modalità di espulsione dell'involuppo, a causa di notevoli incertezze sulle sezioni d'urto e, soprattutto, sull'equazione di stato.

Per questi motivi, esistono sostanzialmente modelli di due tipi: quelli ricondu-

(*) Laboratorio di Cosmo-geofisica del CNR, Torino.

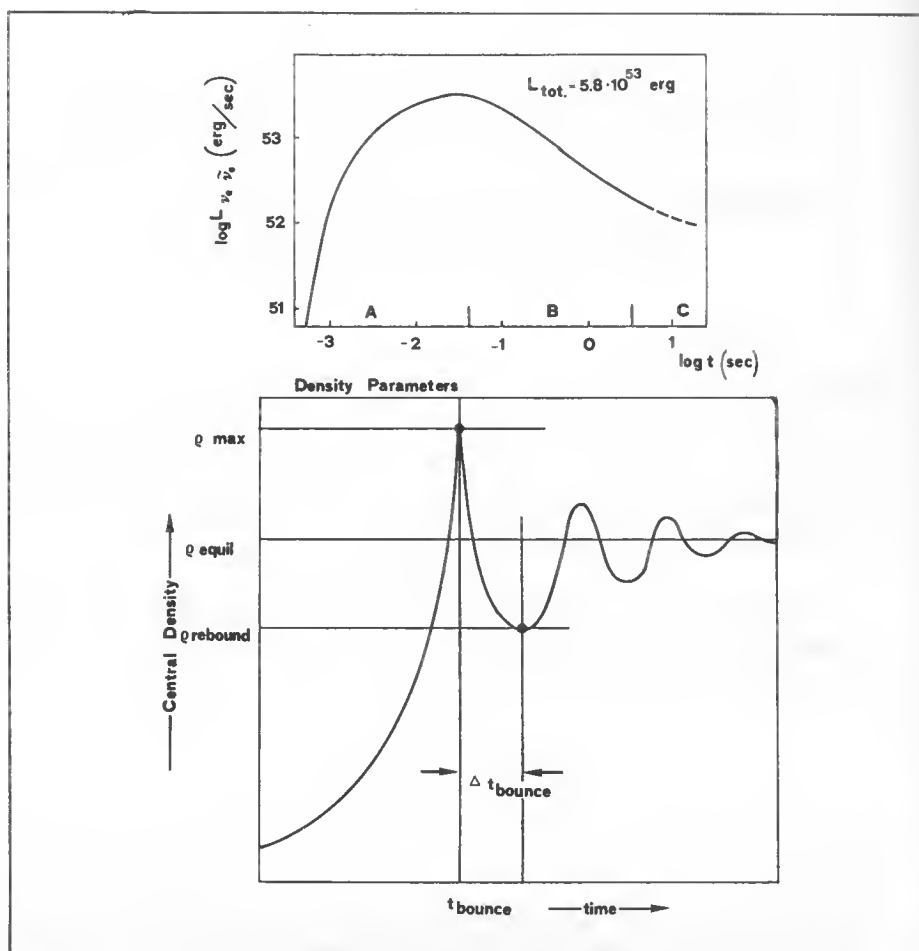


Figura 1. In alto: luminosità neutrinica emessa nel collasso di un core di $2 M_{\odot}$ secondo Nadiozhin (1976). Vengono considerate le seguenti fasi: fase A, formazione del core opaco ai neutrini; fase B, accrescimento dell'involuppo sul core; fase C, raffreddamento Kelvin della stella di neutroni. Le caratteristiche della radiazione neutrino sono le seguenti:

	fase A	fase B	fase C
Durata (sec)	0,04	3,1	15
Luminosità (in %) rispetto al totale	2	35	63
Energia media dei neutrini (Mev)	12	14	15

In basso: rappresentazione schematica del collasso gravitazionale di un core di $1,4 M_{\odot}$ secondo Van Riper (1978). L'emissione neutrinica avviene in corrispondenza dei massimi di densità. I diversi modelli forniscono Δt_{bounce} compreso tra 1,3 e 8,2 millisecondi.

cibili alla scuola statunitense e quelli proposti da fisici sovietici. I primi (Bruenn et al., 1977; Van Riper, 1978; Wilson, 1977; Colgate, 1978, ecc.) prevedono un'emissione discontinua, da 2 a 4 impulsi di neutrini, dovuta alle oscillazioni della stella di neutroni in formazione, su tempi dell'ordine di 10^{-2} sec e con periodicità degli impulsi di $\sim 10^{-3}$ sec. I secondi (Imshennik e Nadiozhin, 1973, Nadiozhin, 1976; Chechetkin et al., 1977), al contrario, prevedono un'emissione continua di neutrini, per un tempo dell'ordine di 20 sec, nella fase di raffreddamento Kelvin della stella di neutroni. In fig. 1 sono rappresentate le caratteristiche di emissione neutrinica per entrambi i modelli.

La rivelazione sperimentale di burst neutrinici è stata proposta per la prima volta da Domogatsky e Zatsepin (1965 a) e l'interesse per questa ricerca sperimentale ha avuto un notevole impulso dopo l'osservazione di un possibile evento nel Gennaio 1974, con l'apparato del Sud Dakota, allora il solo funzionante (Lande et al. (1974)).

La ricerca sperimentale di burst neutrinici viene svolta con l'impiego di rivelatori di grande volume posti sotto grandi spessori di roccia per eliminare, o almeno ridurre, il fondo dovuto alla radiazione cosmica. Le caratteristiche delle stazioni attualmente in funzione e di quelle di fase di realizzazione sono elencate in tabella. Le diverse stazioni sono correlate temporalmente tra loro con una precisione di $\pm 10^{-3}$ sec, in modo da costituire una rete di rivelatori (vedi fig. 2) che nel complesso formano un unico telescopio di dimensioni intercontinentali. Grazie a queste collaborazioni internazionali è possibile determinare la direzione

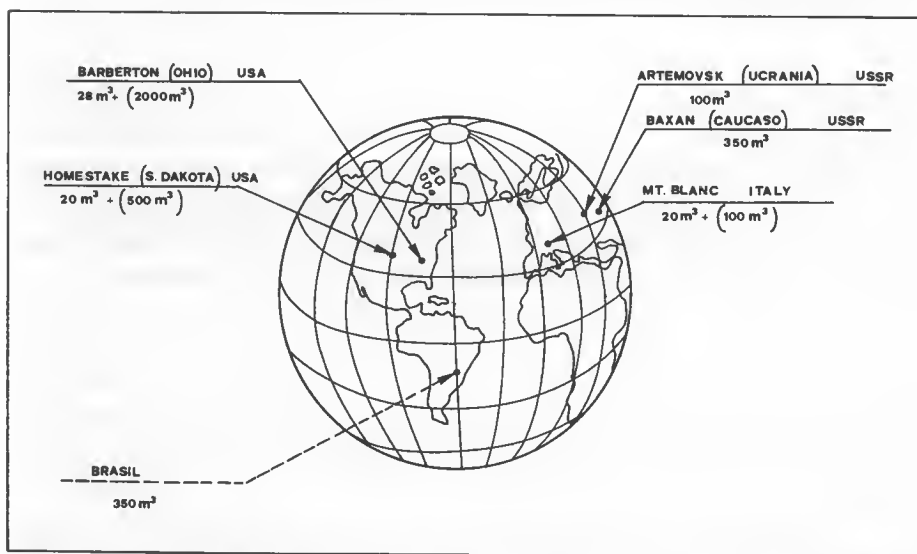


Figura 2. Ubicazione dei Laboratori di astronomia neutrinica. La correlazione temporale tra essi è $\pm 10^{-3}$ sec.

d'arrivo del burst di neutrini, dall'analisi dei ritardi temporali, e tentare l'identificazione della loro sorgente cosmica in altri campi di ricerca: nell'ottico o nel radio, nel dominio dei raggi x o γ , o nell'emissione di onde gravitazionali.

La rivelazione dei neutrini avviene mediante la reazione di cattura:

$$(1) \quad \bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$$

da parte dei protoni del rivelatore, che può essere acqua o scintillatore liquido. Poiché la sezione d'urto della reazione (1) è: $\sigma = 0,75 \cdot 10^{-43} E_\nu^2 \text{ cm}^2$ (E_ν in MeV), tutti i rivelatori attualmente in funzione sono in grado di osservare eventi dovuti a collassi gravitazionali entro la nostra galassia. Infatti, in un rivelatore di 20 tonn. d'acqua, si hanno circa $1,4 \cdot 10^{30}$ protoni bersaglio, per cui il flusso minimo rivelabile è $F_\nu = 4,2 \cdot 10^{10} \bar{\nu}_e \text{ cm}^{-2}$ in neutrini di energia media 15 MeV. Per una sorgente posta al centro galattico che emetta 10^{53} erg in $\bar{\nu}_e$, il flusso a Terra risulta essere $10^{12} \bar{\nu}_e \text{ cm}^{-2}$, per cui ci si aspettano statisticamente circa 20 interazioni per ogni burst neutrino galattico. Per quanto riguarda gli eventi extragalattici, la massima distanza osservabile è proporzionale alla radice quadrata della massa del rivelatore; per poter rivelare, per esempio, un collasso gravitazionale in M31, distante ~ 550 Kpc, occorrerebbe un rivelatore di massa ~ 5000 ton.

La frequenza dei collassi gravitazionali galattici è stata stimata in 1 evento ogni 2-5 anni (Taylor e Manchester, 1977; Pskovsky, 1978) sulla base della statistica di supernovae ottiche (1 evento ogni 11_{-4}^{+15} anni (Tamman, 1976)) e dei diversi effetti di selezione.

Le caratteristiche dei rivelatori neutrino sono state descritte in Deakyne et al. (1978) per quanto riguarda le stazioni americane ed in Chudakova e Ryazskaya (1978) per quanto riguarda le stazioni sovietiche. Una descrizione dettagliata della stazione del Monte Bianco e dei progetti di collaborazione del Laboratorio di Cosmo-geofisica si trova in Badino et al., (1978). Il nostro rivelatore si trova sotto il tunnel del Mt. Bianco a 5,5 km dall'imbocco italiano; esso è composto di 8 contenitori cilindrici di 2,5 ton. di H_2O ciascuno, posti su 2 piani e sovrastati da un insieme di 10 scintillatori plastici per la rivelazione e determinazione della direzione d'arrivo dei μ . Ogni contenitore è visto da 8 fotomoltiplicatori (4 per ogni base del cilindro) a diretto contatto con l'acqua; la condizione per definire un evento è che almeno 5 di essi vedano l'impulso di luce Cerenkov dato dal positrone relativistico della reazione (1). L'acquisizione dei dati avviene mediante registrazione su nastro magnetico. Due orologi al quarzo e la registrazione su nastro dei segnali orari della RAI ci consentono di avere una risoluzione temporale di ogni evento a meno di 10^{-3} s.

La nuova stazione in costruzione sotto il tunnel del Mt. Bianco è realizzata nell'ambito di un accordo di collaborazione tra il Laboratorio di Cosmo-geofisica del CNR di Torino e l'Istituto di Ricerche Nucleari dell'Accademia delle Scienze

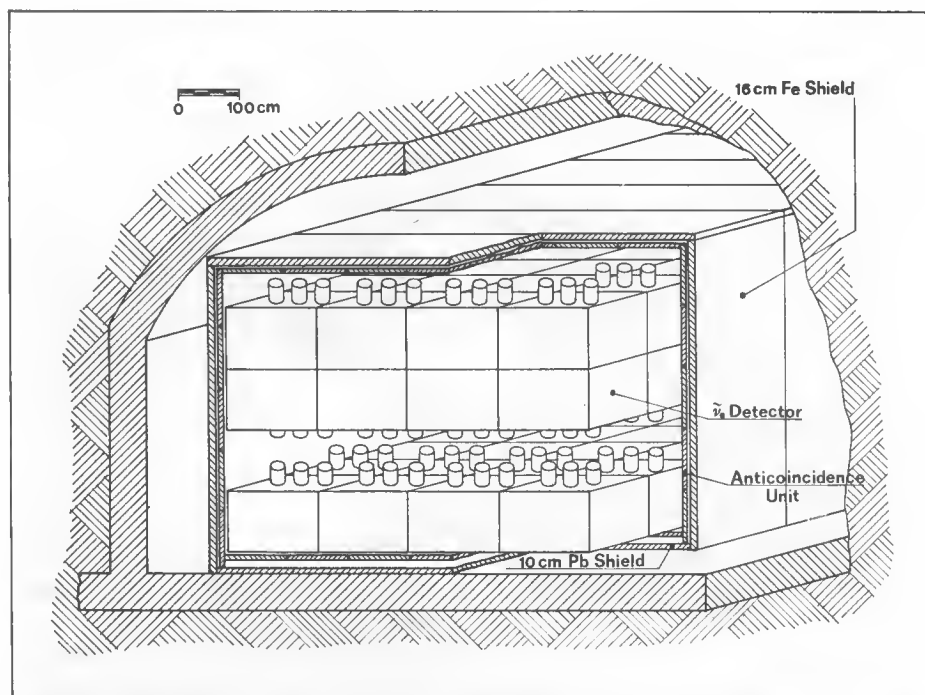


Figura 3. Schema del rivelatore da 100 tonnellate in costruzione sotto il traforo del Monte Bianco.

dell'URSS (Mosca). Si prevede che il completamento del sistema avvenga entro il 1981/82. La stazione consisterà di 72 contenitori di 1,5 ton ciascuno di scintillatore liquido, per un totale di ~ 100 ton di rivelatore, circondato da ogni lato da uno schermo di ferro dello spessore di 16 cm, in modo da ridurre il fondo dovuto alla radiazione cosmica ed alla radioattività della roccia. Il rivelatore e lo schermo saranno a loro volta, circondati da ogni lato da un sistema di anticoincidenza (vedi fig. 3).

In questo modo sarà possibile rivelare anche i γ di cattura del neutrone termico prodotto dalla reazione (1), mediante la reazione:



ottenendo così una conferma dell'avvenuta cattura dei $\bar{\nu}_e$. Il sistema di acquisizione dati diventa perciò indipendente dal modello di emissione neutrinica della sorgente, a differenza di quanto accade per le attuali stazioni. Il sistema di anticoincidenza, inoltre, permetterà di discriminare gli eventi che hanno origine all'interno del rivelatore ed in particolare ci permetterà di ottenere un limite inferiore alla vita media del nucleone ($\sim 10^{32}$ anni); migliorando di $\sim 10^2$ le attuali

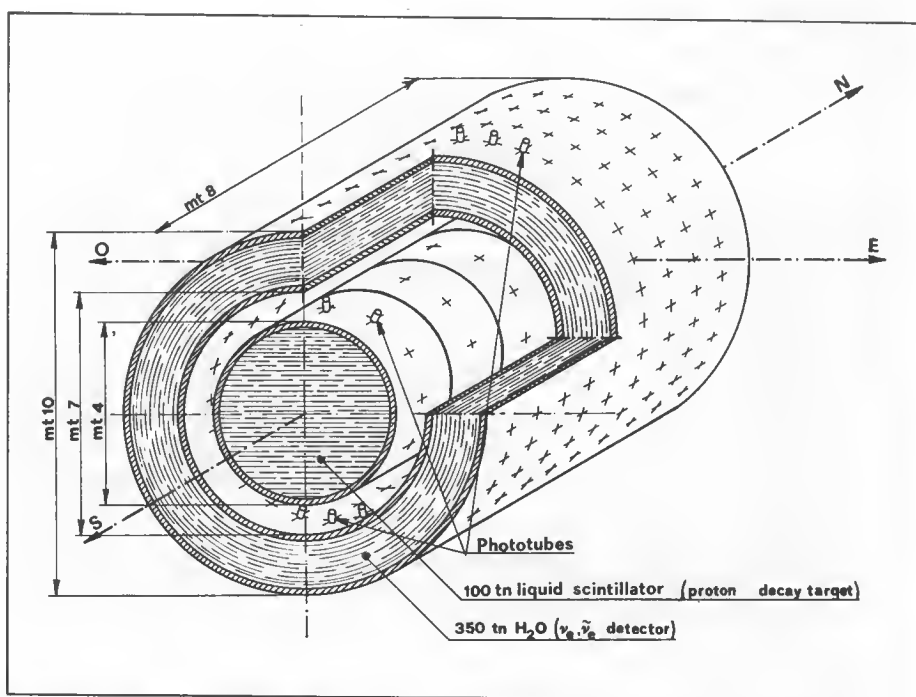
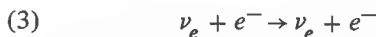


Figura 4. Progetto di rivelatore per ν_e e $\bar{\nu}_e$, in fase di studio per il laboratorio brasiliano.

determinazioni sperimentali.

Il nostro gruppo sta infine collaborando alla realizzazione della stazione neutrinica che verrà realizzata in Brasile, nell'ambito di un accordo tra il Laboratorio di Cosmo-geofisica del CNR di Torino e l'Istituto di Fisica dell'Università di Campinas. Attualmente si stanno analizzando dettagliatamente le possibilità di realizzazione di un esperimento che consenta sia la rivelazione dei $\bar{\nu}_e$ mediante la (1), sia la rivelazione dei ν_e mediante la reazione di scattering elastico



In particolare, sarà possibile, con questo esperimento, determinare anche il flusso di neutrini solari senza perdere in efficienza di rivelazione rispetto a burst di $\bar{\nu}_e$ da collassi gravitazionali ed a particelle cariche cosmiche.

La geometria dell'apparato in fase di studio è quella di un cilindro cavo lungo l'asse, con fotomoltiplicatori posti sulle superfici laterali, interna ed esterna, del cilindro (vedi fig. 4). Una caratteristica importante della reazione (3) è la conservazione della direzione di arrivo dei ν_e (Domogatsski e Zatsepin, 1965 b); perciò, orientando il rivelatore con l'asse principale del cilindro in direzione Nord-Sud si ottiene efficienza di rivelazione costante per ogni posizione della Terra

Caratteristiche delle stazioni di astronomia del neutrino e loro sviluppi futuri.

Località (Nazione)	Anno di inizio	Rivelatore (tonn.)	Profondità (m.w.e.)	Sensibilità		Esperimenti collaterali
				ν_e	$\bar{\nu}_e$	
Homestake (U.S.A.)	1973	H ₂ O (20)	4400	—	si	(1)
Barbeton (U.S.A.)	1974	H ₂ O (28)	1800	—	si	(1)
Mt. Bianco (Italia)	1974	H ₂ O (20)	5000	—	si	(1)
Artemovsk (U.R.S.S.)	1977	C _n H _{2n} (100)	700	—	si	(1), (2), (4)
Baxan (U.R.S.S.)	1977	C _n H _{2n} (350)	850	—	si	(1), (2)
Homestake	1979-80	H ₂ O (500)		—	si	(1), (2), (4)
Barbeton	1980/81	H ₂ O (2000)		?	si	(1), (2), (4)
Mt. Bianco	1981/82	C _n H _{2n} (100)		—	si	(1), (2), (4)
Campinas (Brasile)	1981/82	H ₂ O (350)	?	si	si	(1), (2), (3), (4)

Esperimenti collaterali:(1) Fisica dei μ (interazioni nucleari, intensità, cascate, μ -stop, ecc.) Anisotropie siderali dei μ .(2) Fisica di ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ecc. cosmici direzionalità e rapporti di intensità.

(3) Misura del flusso dei neutrini solari.

(4) Misura della vita media del nucleone.

rispetto al Sole durante il suo moto diurno. In questo modo, solo i fotomoltiplicatori compresi entro il cono di luce Cerenkov prodotto dall'elettrone scatterato verrebbero coinvolti nella coincidenza che definisce l'evento, mentre tutti gli altri funzionerebbero da anticoincidenza. Naturalmente è necessario eliminare quasi completamente il fondo radioattivo della roccia circostante l'apparato sperimentale e progettare un sistema di trigger che correli istante per istante la posizione del Sole con i fotomoltiplicatori coinvolti nell'evento.

Per un rivelatore di 350 ton di H₂O, quale quello in fase di progetto, ci si aspetta l'osservazione di 1 evento al giorno dovuto alla reazione (3), indotta dai neutrini solari del ^8B .

Con un'estensione sperimentale di questo apparato sarebbe inoltre possibile

determinare anche con questo esperimento il limite inferiore alla vita media del nucleone: introducendo un cilindro, riempito di scintillatore liquido, entro l'apparato neutrinico e coassiale ad esso. E' possibile discriminare gli eventi che hanno origine nel cilindro interno analizzando la risposta dei singoli fotomoltiplicatori dell'apparato. Con 100 ton. di scintillatore liquido del cilindro interno, si ottiene un limite di $\sim 10^{31}$ anni.

Infine, abbiamo recentemente mostrato l'utilità di realizzare correlazioni tra rivelatori neutrinici e rivelatori di onde gravitazionali (vedi Castagnoli et al., 1978) per poter ottenere informazioni sperimentali dirette sulla dinamica e sulle modalità dei collassi gravitazionali di nuclei stellari. Per questo scopo, il Laboratorio di Cosmo-geofisica del CNR di Torino ed il gruppo dell'Istituto di Fisica dell'Università di Roma, diretto dal prof. Amaldi, che conduce l'esperimento per la rivelazione delle onde gravitazionali, collaborano con scambi di risultati dei rispettivi rivelatori alla ricerca di eventi in coincidenza temporale che possano essere dovuti alla medesima sorgente cosmica. Se una coincidenza dovesse essere osservata si avrebbe per la prima volta la possibilità di conoscere sperimentalmente, in dettaglio, i fenomeni fisici che regolano il collasso gravitazionale di una massa stellare nelle fasi finali della sua evoluzione.

BIBLIOGRAFIA

- BADINO G., CASTAGNOLI C., GALEOTTI P., PERIALE L., SAAVEDRA O.: 1978, Rapporto Interno n. 40/78 LCG, in stampa.
- BRUENN S., ARNETT W. D., SCHRAMM D. N.: 1977, *Astrophys. J.*, **213**, 213.
- CASTAGNOLI C., GALEOTTI P., SAAVEDRA O.: 1978, *Astrophys. Sp. Sci.*, **55**, 511.
- CHECHETKIN V. M., IMSHENNIK V. S., IVANOVA L. N., NADYOZHIN D. K.: 1977 in *Supernovae*, ed. D.N Schramm (Reidel Dordrecht, Olanda).
- CHUDAKOV A. E., RYAZHSKAYA O. G.: 1978 *Proceedings Neutrino '77*.
- COLGATE S.: 1978, Preprint «Ettore Majorana» workshop on supernovae, Erice.
- DEAKYNE M., FRATI W., LANDE K., LEE C. K., STEINBERG R. I., FENYVES E., SAAVEDRA O.: 1978 *Proceedings Neutrino '77*.
- DOMOGATSKY G. V., ZATSEPIN G., 1965 a, *Cosmic Rays Conf. Londra*.
- DOMOGATSKY G. V., ZATSEPIN G., 1965 b, *Cosmic Rays Conf. Londra*.
- GALLINO R., MASANI A., 1977, *Mem. S.A.It.*, **48**, 589.
- IMSHENNIK V. S., NADYOZHIN D. K., 1973, *Soviet. Phys., JETP*, **36**, 821.
- LANDE K., BOZOKI G., FRATI W., LEE C. K., FENYVES E., SAAVEDRA O., 1974 *Nature*, **251**, 485.
- NADYOZHIN D. K., 1976, Preprint I.A.M. (Mosca), n. 26.

PSKOSVKY Yu. P.: 1978 Proceedings Neutrino '77.

TAMMAN G. A., 1976, Proceedings DUMAND summer workshop.

TAYLOR J. H., MANCHESTER R. N., «Pulsars» Ed. Freeman, 1977.

VAN RIPER K., 1978, Astrophys. J., 221, 304.

WHEELER J. C., 1976, Proceedings DUMAND summer workshop.

WILSON J. 1977 Preprint L. Livermore Laboratory, n. 76947.



ROBERTO CATENACCI (*), FRANCO SALMISTRARO (*)

GEOMETRIA DIFFERENZIALE COMPLESSA IN RELATIVITA' GENERALE.

Abstract.

The elementary complex differential geometry is reviewed and adapted to the physical (Lorentzian) signature of the metric.

Motivati dal rinnovato interesse (1) dei relativisti, e dei fisici teorici in generale, per le tecniche della geometria differenziale complessa, presentiamo una rassegna delle definizioni e dei teoremi più importanti, sottolineando le modificazioni imposte dal carattere indefinito della metrica fisica.

Maggiori dettagli si possono trovare in [5], [6], [7]. In questo articolo uno *spazio-tempo* sarà una varietà differenziale a quattro dimensioni, di classe C^ω (analitica sul campo reale), con una metrica g indefinita (di segnatura $+---$) a valori reali. Supporremo inoltre che possieda una struttura spinoriale nel senso di Geroch [8], ammettendo così un campo globale di tetradi nulle ortogonali: $g = \vartheta^{(0)} \otimes \vartheta^{(3)} + \vartheta^{(3)} \otimes \vartheta^{(0)} - \vartheta^{(1)} \otimes \vartheta^{(2)} - \vartheta^{(2)} \otimes \vartheta^{(1)}$, $\overline{\vartheta}^{(1)} = \vartheta^{(2)}$.

Supporremo anche che lo spazio-tempo sia dotato della usuale connessione metrica ∇ :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$\nabla_X (g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

per ogni X, Y, Z campi vettoriali.

Presupporremo noto e adotteremo sistematicamente il formalismo di Newman-Penrose-Debever [9, 10, 11], indicando con $Z^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) e $\overline{Z^{(\alpha)}}$ le basi di C_3 e $\overline{C}_3$, rispettivamente i due sottospazi in cui Λ_2 (spazio delle due-forme a valori

(*) Istituto di Fisica Teorica dell'Università di Pavia; Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Pavia.

(1) Si veda ad esempio la teoria dei Twistors [1], la teoria dello spazio H [2] e le recenti pubblicazioni [3], [4] sugli istantoni gravitazionali.

complessi) viene spezzato irriducibilmente dall'operazione dualità (2):

$$F_{ij} \rightarrow *F_{ij} := \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} F^{km}$$

$$**F = -F$$

dove $i, j, k, m = 0, 1, 2, 3$ denoteranno sempre le componenti di tetrade nulla di un qualsiasi oggetto geometrico, ed ϵ è il tensore completamente asimmetrico. In Λ_2 si può definire un «prodotto scalare» non degenerare:

$$(F, G) := \frac{1}{4} F_{ij} G^{ij} = \gamma^{\alpha\beta} (F_\alpha G_\beta + F_{\bar{\alpha}} G_{\bar{\beta}})$$

dove $\gamma^{\alpha\beta} = (Z^{(\alpha)}, Z^{(\beta)}) = (\overline{Z^{(\alpha)}}, \overline{Z^{(\beta)}})$ e, $\forall F \in \Lambda_2$

$$F = F_\alpha Z^{(\alpha)} + F_{\bar{\alpha}} \overline{Z^{(\alpha)}}.$$

Indicheremo anche, come al solito, con $\sigma_{(\alpha)}$ le 1-forme «componenti» della 1-forma (a valori in Λ_2) di connessione ω :

$$\omega(X) := (\nabla_X \vartheta_{(i)}) \otimes \vartheta^{(i)} := \frac{1}{2} (\sigma_{(\alpha)}(X) Z^{(\alpha)} + \overline{\sigma_{(\alpha)}(X)} \overline{Z^{(\alpha)}}).$$

DEFINIZIONE 1: Una struttura quasi hermitiana J in (M, g) è un campo tensoriale differenziabile di rango $(1, 1)$ tale che:

$$J(J(X)) = -X$$

$$g(J(X), J(Y)) = g(X, Y).$$

Da queste due proprietà è immediato verificare che il campo tensoriale covariante $K(X, Y) := g(X, J(Y))$ è una 2-forma detta forma di Kähler.

PROPOSIZIONE 1: J definisce una struttura quasi hermitiana se e solo se

$$(K, K) = 1, \quad *K = \pm iK$$

Di notevole importanza è il seguente corollario:

COROLLARIO: in uno spazio-tempo *non* esistono strutture quasi hermitiane

(2) $\Lambda_2 = C_3 \oplus \overline{C}_3$

$C_3 = \{F \in \Lambda_2 : *F = iF\}, \quad \overline{C}_3 = \{F \in \Lambda_2 : *F = -iF\}.$

a valori reali; questo fatto influenzerà profondamente tutte le considerazioni sull'integrabilità delle quasi-strutture.

DEFINIZIONE 2: J è detta struttura quasi-Kähleriana se J è una struttura quasi hermitiana e $dK = 0$.

PROPOSIZIONE 2: uno spazio tempo ammette una struttura quasi Kähleriana se e solo se ammette una tetraide nulla per cui $\psi = 0$, dove ψ è definita da:

$$dZ^{(3)} = \sigma_{(1)} \wedge Z^{(1)} - \sigma_{(2)} \wedge Z^{(2)} = \psi \wedge Z^{(3)}.$$

PROPOSIZIONE 3: uno spazio tempo è conforme a una varietà quasi Kähleriana se e solo se $d\psi = 0$.

COROLLARIO: uno spazio tempo vuoto di tipo D o di tipo II (nella classificazione di Debever-Pirani-Bell-Penrose-Petrov) è conforme ad una varietà quasi-Kähleriana (con fattore conforme in generale complesso).

Molto più importante, ai fini delle applicazioni, è il caso in cui la struttura quasi-hermitiana, è *integrabile*, nel senso che esiste un atlante massimale di carte locali in cui la metrica *reale* può essere scritta come

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^{\tilde{\beta}} \quad \alpha = 0, 1$$

$$\tilde{\alpha} = \tilde{0}, \tilde{1}$$

e la trasformazione tra carte locali è realizzata dallo pseudogruppo delle trasformazioni «formalmente» analitiche:

$$z^\alpha \rightarrow z^{\alpha'}(z^\alpha)$$

$$z^{\tilde{\beta}} \rightarrow z^{\tilde{\beta}'}(z^{\tilde{\beta}}).$$

Tali coordinate, dette *coordinate di struttura*, obbediscono alle condizioni $z^0 = \bar{z}^0$, $z^{\tilde{0}} = \bar{z}^{\tilde{0}}$, $z^1 = z^{\tilde{1}}$ e sono coordinate nulle. E' proprio nella dimostrazione della fondamentale proposizione 4 che gioca un ruolo ineliminabile la condizione di analiticità nel reale della varietà, condizione che può essere eliminata invece trattando varietà con metrica definita positiva [12].

PROPOSIZIONE 4: J è integrabile se e solo se $N = 0$, dove N è una due-forma a valori vettoriali definita da:

$$N(X, Y) = [J(X), J(Y)] - [X, Y] - J[X, J(Y)] - J[J(X), Y].$$

PROPOSIZIONE 5: uno spazio-tempo ammette una struttura quasi-hermitiana

integrabile se e solo ammette due congruenze geodetiche e shear-free: $\sigma_{(1)} \wedge Z^{(2)} = \sigma_{(2)} \wedge Z^{(1)} = 0$.

L'importanza geometrica della condizione $dK = 0$ che caratterizza le strutture Kähleriane risiede nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 6: se $N = 0$, $\nabla_X(J(Y)) = J(\nabla_X Y)$ se e solo se $dK = 0$. Cioè J è parallelo rispetto alla connessione metrica.

PROPOSIZIONE 7: uno spazio-tempo ammette una struttura quasi-Kähleriana integrabile se e solo se $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = 0$.

COROLLARIO: gli spazi tempo Kähleriani possono essere solo di tipo D o di tipo 0 .

Diamo ora due teoremi che caratterizzano le varietà Kähleriane soluzione delle eq. di Einstein.

PROPOSIZIONE 8: la più generale soluzione Kähleriana delle eq. di Einstein-Maxwell è la metrica di Bertotti-Robinson [13].

PROPOSIZIONE 9: la più generale soluzione Kähleriana delle eq. di Einstein con costante cosmologica è la soluzione di Nariai [14]. Questi due teoremi dimostrano come lo studio delle varietà Kähleriane vada necessariamente esteso al caso di varietà con *metriche complesse*.

Per concludere diamo qualche risultato di carattere tecnico peculiare della dimensione 4 e del carattere lorentziano della metrica.

PROPOSIZIONE 10: uno spazio tempo quasi-Kähleriano ($dK = 0$) è uno spazio prodotto. Cioè la sola esistenza di una struttura *quasi-Kähleriana* implica l'esistenza di un campo tensoriale P tale che (3):

$$P(P(X)) = X$$

$$g(P(X), P(Y)) = g(X, Y)$$

$$[P(X), P(Y)] - [X, Y] - P[X, P(Y)] - P[P(X), Y] = 0.$$

L'ultima proprietà implica l'esistenza di coordinate locali in cui il tensore metrico si scrive

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}}$$

(3) $P(X) := \pm J(J(X))$; dove J è esteso per linearità allo spazio tangente complessificato.

$$x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}(x^\alpha)$$

$$x^{\tilde{\beta}} \rightarrow x^{\tilde{\beta}}(x^{\tilde{\beta}}).$$

Cioè uno spazio-tempo quasi Kähleriano è il prodotto topologico di due sotto-varietà di dimensione 2.

COROLLARIO: ogni soluzione delle equazioni di Einstein-Maxwell per un campo elettromagnetico *non nullo* è conforme a uno spazio prodotto (in generale con fattore conforme complesso).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] PENROSE R., *Twistor theory: Its aim and achievements in Quantum gravity*, Oxford University Press 1975.
- [2] NEWMAN E. T.: G.R.G. 7, 107 (1976).
- [3] GIBBONS G. W., POPE C. N.: Comm. math. phys. 61, 239 (1978).
- [4] EGUCHI T., FREUND P.: Phys. Lett. 73B (1978).
- [5] FLAHERTY E. J.: *Hermitian and Kählerian geometry in Relativity*, Lectures notes in Physics N. 46 Springer Verlag 1976.
- [6] CATENACCI R., SALMISTRARO F.: Journal of math. phys. 19, 2047, (1978) e Nuovo Cimento 46B, 167, (1978).
- [7] CATENACCI R., SALMISTRARO F.: *On Kähler metrics in Lorentzian Manifolds*, submitted to Annales de l'Institut H. Poincaré (1979).
- [8] GEROCH R.: J. math. phys. 9, 1739, (1968) e 11, 343, (1970).
- [9] DEBEVER R.: Cahiers de Physique 303 (1964).
- [10] ISRAEL W.: Commun. Dublin Inst. Adv. Studies 19 (1970).
- [11] BAMPI F., CAVIGLIA G., MASSA E., ZORDAN C.: *Bivettori complessi in Relatività Generale*, Quaderni CNR, Genova (1976).
- [12] NEWLANDER A. e NIREMBERG L.: Ann. of Math. 65, 391, (1957).
- [13] BERTOTTI B.: Phys. Rev. 116, 1331 (1959).
- [14] NARIAI H.: Sci. Rep. Tohoku Univ. 34, 160 (1950).



GIACOMO CAVIGLIA (*), CLARA ZORDAN (*)

NOTA SUL CAMPO ELETTROMAGNETICO GENERATO DA UNA CARICA IN MOTO IN RELATIVITA' GENERALE.

Abstract.

We determine a set of sufficient conditions for the existence of a Lienard-Wiechert solution of the Maxwell equations.

E' ben noto che, nell'ambito della relatività speciale, la determinazione del campo elettromagnetico generato da una carica in moto assegnato è riconducibile all'integrazione di un'equazione vettoriale delle onde, e che la soluzione ottenuta è l'usuale potenziale di Lienard-Wiechert [1].

La risoluzione dell'analogo problema nello spazio-tempo curvo della relatività generale presenta notevoli difficoltà di natura formale, in quanto le funzioni di Green per le equazioni d'onda vettoriale e scalare dipendono da tutta la storia passata della carica che genera il campo. Per questa ragione, un approccio al problema mediante l'introduzione delle funzioni di Green implica quasi automaticamente l'uso di metodi di approssimazione [2 ÷ 7].

Lo scopo di questa nota è allora di introdurre un formalismo alternativo, fondato su metodi di natura geometrica, per analizzare il campo elettromagnetico generato da una carica puntiforme di prova che si muove in uno spazio-tempo curvo con geometria assegnata.

La nostra trattazione è essenzialmente basata su una caratterizzazione dei potenziali di Lienard-Wiechert nello spazio-tempo piatto fornita da E. T. Newman [8]: condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di Maxwell regolare all'infinito sia di Lienard-Wiechert è che uno dei campi vettoriali principali nulli del tensore di Maxwell soddisfi le seguenti condizioni: (i) essere il campo tangente ad una congruenza nulla; (ii) avere divergenza θ non nulla; (iii) avere shear σ nullo; (iv) avere rotazione ω nulla.

(*) Istituto Matematico dell'Università di Genova, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

Sulla base di questo risultato ci proponiamo di costruire, in uno spazio-tempo curvo, un campo vettoriale nullo che giochi lo stesso ruolo del campo descritto da Newman.

A questo scopo osserviamo che, essendo assegnate la geometria dello spazio-tempo, la traiettoria a della carica individua la congruenza Γ nulla e geodetica costituita dai raggi uscenti dai punti di a e diretti verso il futuro.

Ciascuna curva di Γ può essere riferita ad un parametro affine r definito dalla condizione che il campo vettoriale k tangente ai raggi ad esso associato soddisfi la relazione di normalizzazione [9]

$$\langle e_{(o)}, g(k) \rangle = 1,$$

ove con $e_{(o)}$ si denota il versore tangente alla linea a (1).

Le condizioni (i) e (iv) di Newman sono allora automaticamente soddisfatte dal campo k [9].

Sia ora F il tensore del campo elettromagnetico generato dalla carica. La condizione che k sia un vettore principale di F può essere realizzata assumendo che il quadripotenziale del campo F sia della forma $A g(k)$, essendo A una funzione incognita. In tal caso, i coefficienti di Maxwell complessi ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 sono esprimibili in funzione delle derivate di A :

$$\phi_0 = 0, \phi_1 = 1/2 DA, \phi_2 = \bar{\delta}A,$$

mentre le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti assumono la forma:

$$\begin{aligned} DDA - 2\rho DA &= 0 \\ \delta DA &= 0 \\ (1) \quad 2D\bar{\delta}A - \bar{\delta}DA &= 2\rho\bar{\delta}A \\ 2\delta\bar{\delta}A - \Delta DA &= 2\mu DA - 4\beta\bar{\delta}A. \end{aligned}$$

Le condizioni di integrabilità del sistema (1) possono essere espresse nelle forme equivalenti [9]:

$$\begin{aligned} a) R(m, k) k &= 0; \\ b) \sigma = \pi = \tau &= 0, \quad \theta = 1/r; \end{aligned}$$

(1) Nel seguito adotteremo il formalismo delle tetradi nulle con gli stessi simboli e convenzioni introdotti da Newman e Penrose in [10]. Saranno anche tralasciati i calcoli dettagliati per i quali si rimanda a [9].

Conveniamo che la segnatura della metrica sia $+- - -$. L'applicazione $g: D^1 \rightarrow D_1$ definita da $g(X^i \partial_i) = X_i dx^i$ (con $X_i = g_{ij}X^j$) corrisponde all'usuale processo di abbassare gli indici tensoriali.

$$c) \theta = 1/r, \sigma = 0, \delta r = \bar{\delta} r = 0, n = g^{-1}(dr) - 1/2 \Delta_1 rk \\ \text{con } Dn = 0;$$

$$d) \vartheta = 1/r, \delta r = \bar{\delta} r = 0, k \text{ è un vettore principale nullo del tensore di Weyl,}$$

dove le condizioni (b), (c), (d) si intendono verificate per almeno una scelta della tetrad nulla $\{k, n, m, \bar{m}\}$.

Per chiarire il significato delle condizioni di integrabilità notiamo i seguenti fatti.

1. La condizione (a) è indipendente dalla scelta della tetrad nulla, essendo invariante per rotazioni spaziali e rotazioni nulle. Pertanto essa pone delle restrizioni sulla scelta della geometria o, equivalentemente, seleziona la classe delle varietà spazio-temporali alle quali si può applicare la nostra discussione.

2. Se lo spazio tempo è vuoto oppure electrovac la sola ipotesi che k sia un vettore principale nullo del tensore di Weyl implica la condizione (b) e quindi tutte le altre equivalenti.

3. Dalla condizione (b) discende che i campi $n, rm, r\bar{m}$ generano gruppi locali ad un parametro di trasformazioni che mutano ciascun raggio della congruenza Γ in un altro raggio di Γ [11, 12].

4. Le condizioni (ii) e (iii) di Newman ($\sigma = 0, \theta \neq 0$) sono contenute nelle equazioni (b) e (c): apparentemente queste ultime ($\sigma = 0, \theta = 1/r$) sono più restrittive, tuttavia, sfruttando l'invarianza delle equazioni di Maxwell per trasformazioni conformi, si può dimostrare che la condizione $\theta = 1/r$ può essere sostituita dalla condizione più debole $\theta \neq 0$ [9].

Imponendo le condizioni di integrabilità, si può dimostrare che il sistema (1) delle equazioni di Maxwell ammette la soluzione

$$\phi_0 = 0, \phi_1 = e/r^2, \phi_2 = z/r,$$

essendo e la carica della particella in moto, ed essendo z una funzione costante lungo ciascun raggio della congruenza.

Le espressioni di ϕ_0, ϕ_1 coincidono con quelle ottenute da Newman per il campo di Lienard-Wiechert in relatività speciale. Il termine ϕ_2 ha il corretto comportamento di un termine di tipo radiativo.

Sottolineiamo infine che il termine ϕ_2 si annulla quando la linea a è una geodetica, cosicché il campo ammette soltanto la parte statica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] LANDAU L.D., LIFSHITZ E. M. (1962), *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford.
- [2] DE WITT B. S., BREHME R. W. (1960); Ann. Phys. 9, 220.

- [3] HOBBS J. M. (1968); *Ann. Phys.* 47, 141.
- [4] HOBBS J. M. (1968); *Ann. Phys.* 47, 166.
- [5] PETERS P. C. (1969); *J. Math. Phys.* 10, 1216.
- [6] RUDOLPH E. (1975); *Ann. Inst. Henry Poincaré* 23, 113.
- [7] BIRD G. M., DIXON W. G. (1975); *Ann. Phys.* 94, 320.
- [8] NEWMAN E. T. (1974); *J. Math. Phys.* 15, 44.
- [9] CAVIGLIA G., ZORDAN C.; B.U.M.I. (in stampa).
- [10] NEWMAN E. T., PENROSE R. (1962); *J. Math. Phys.* 3, 566.
- [11] MASSA E.; *Ann. Mat. Pura e Appl.* (in stampa).
- [12] CAVIGLIA G., ZORDAN C. (1977); *Meccanica* 12, 66.

R. FABBRI (*), F. MELCHIORRI (**), V. NATALE (**)

MISURA DEL PARAMETRO DI DECELERAZIONE COSMOLOGICA TRAMITE L'EFFETTO SUNYAEV-ZELDOVICH.

Abstract.

We suggest a measurement of the cosmological deceleration parameter through observations of the Sunyaev-Zeldovich effect. The main problem, consisting in the separation of evolutionary effects in the $\theta(z)$ plot, can be solved by performing differential $n(\theta)$ counts. The Sunyaev-Zeldovich clusters seem to be the only objects usable to this purpose.

In questa comunicazione proponiamo di ricercare clusters ricchi di galassie a redshift elevati ($z > 1$) investigando l'effetto Sunyaev-Zeldovich in un survey dell'anisotropia del fondo cosmico a piccole scale angolari ($1'-10'$). Suggeriamo di utilizzare questi clusters distanti per effettuare il conteggio $n(\theta)$ (numero di oggetti con raggio angolare θ) e determinare così l'evoluzione del raggio di «core» dei clusters. Una volta determinata empiricamente la funzione $R(z)$ si potrà usare il noto diagramma $\theta(z)$ per una misura pulita, cioè corretta da effetti evolutivi, del parametro di decelerazione cosmologica q_0 .

L'effetto Sunyaev-Zeldovich è una anisotropia del fondo di radiazione cosmico, originata dall'interazione della radiazione del fondo con i gas caldi dei clusters (1). L'intensità della radiazione presenta un eccesso o un difetto in direzione del cluster; il segno dell'effetto cambia bruscamente attorno a $\lambda = 1,4$ mm. Questa caratteristica può essere usata per individuare l'effetto SZ nella regione millimetrica. Segnali negativi (difetti di radiazione) sono già stati rivelati in alcuni clusters nella regione centimetrica; tuttavia, per la maggiore intensità dei segnali nella regione millimetrica e la maggior sensibilità dei rivelatori infrarossi rispetto ai sistemi radio (2), esperimenti a $\lambda = 0,8-2,5$ mm possono portare a scoprire un grande numero di clusters con effetto SZ, sufficiente per l'applicazione cosmologica che noi suggeriamo.

(*) Istituto di Fisica Superiore, Università di Firenze.

(**) Gruppo Infrarosso, IROE-CNR, Firenze.

La fluttuazione di intensità del fondo misurata da un isotropometro che osservi alternativamente un cluster ed una linea di vista adiacente ad esso risulta

$$I_{\lambda} = 2\gamma (kT_0)^5 h^{-4} c^{-3} x^6 e^x (e^x - 1)^{-2} \\ (x \coth x/2 - 4) (W \text{ cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ micron}^{-1})$$

dove γ dipende dalla struttura del cluster, $x = hc/kT_0\lambda$, e T_0 è la temperatura del fondo all'epoca attuale $z = 0$. Sia l'intensità (3) che la forma spettrale (4) non dipendono dal redshift. Pertanto gli oggetti dotati di effetto SZ sono gli unici oggetti distanti che non sono affetti dal redshift cosmologico, e possono essere osservati anche se sono invisibili nelle bande ottica e X. E' stato proposto di ricercare l'effetto SZ in sorgenti X non identificate (3); tuttavia per la misura che proponiamo è opportuno un programma osservativo più ambizioso, consistente in un survey generale dell'anisotropia del fondo cosmico a due bande di frequenza, corrispondenti alle finestre atmosferiche a 0,8-1,4 mm e 2,0-2,5 mm: anisotropie di natura cosmologica danno segnali dello stesso segno nelle due bande, mentre le anisotropie SZ danno segnali di segni opposti e possono quindi essere facilmente separate. Usando un telescopio da 10 m, un cluster di raggio angolare $\theta = 1'$ con $\gamma = 10^{-4}$ dà segnali dell'ordine di $\pm 10^{-14}$ W. Utilizzando filtri con efficienza del 10% e rivelatori infrarossi con NEP di 10^{-15} W Hz $^{-1/2}$, si possono rivelare tali segnali con un tempo di integrazione dell'ordine del secondo. Tali misure si possono realizzare a terra, prima dell'avvento di grandi telescopi per uso spaziale, e possono portare alla scoperta di un numero elevato di oggetti in tempi ragionevoli.

E' noto che misurando il raggio angolare θ in funzione di z si può ricavare il parametro di decelerazione q_0 se si separa l'evoluzione del raggio lineare R del cluster. Questo problema era finora irrisolto (5). Sugeriamo di separare gli effetti evolutivi nel plot $\theta(z)$ realizzando il conteggio differenziale $n(\theta)$, numero di cluster SZ in funzione del raggio angolare del gas caldo del cluster. Per realizzare un conteggio di tal genere è essenziale avere oggetti che abbiano poca dispersione nei raggi ad un assegnato redshift, e che siano rivelabili anche a redshift elevati. I clusters SZ sono probabilmente gli unici oggetti utilizzabili al nostro scopo.

Supponiamo che il raggio dei clusters si evolva come $R(z) = R_0(1+z)^m$. Si ha

$$n(\theta) = 4\pi(c/H_0)^4 \int_0^{z_{max}} dz \rho(R_0(\theta, z)) \\ \frac{\{q_0 z + (q_0 - 1) [(1 + 2q_0 z)^{1/2} - 1]\}^3}{q^6 (1+z)^{5+m} (1 + 2q_0 z)^{1/2}}$$

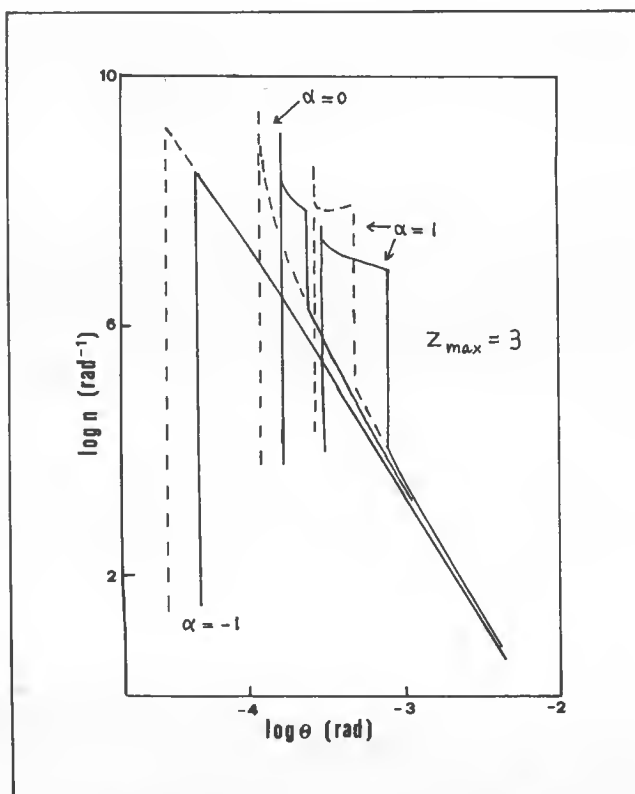


Fig. 1. Il plot $n(\theta)$ per $q_0 = 0.05$ (linee tratteggiate) e per $q_0 = 0.45$ (linee continue).

dove H_0 è la costante di Hubble e $\rho(R_0)$ (Mpc^{-4}) è la distribuzione dei clusters a redshift zero. I conteggi assumono il tipico aspetto esemplificato da Figura 1. Per θ grande si ha $n(\theta) \propto \theta^{-4}$. Per θ piccolo la distribuzione dipende fortemente da m . Per $m \leq -1$ si ha una pendenza logaritmica ≤ 4 , mentre per $m > -1$ i conteggi rivelano un eccesso di clusters lontani prima dell'angolo di cutoff $\theta_{\min}$. La larghezza dell'eccesso dipende da $z_{\max}$, epoca di formazione del gas caldo dei clusters, ma l'angolo $\theta_{\min}$ dipende praticamente solo da m per $m > -1$.

Un'analisi accurata potrà determinare sia m che $z_{\max}$, cioè l'evoluzione dei clusters. Nella figura si assume che per tutti i clusters si abbia $R_0 = 0,25$ Mpc. Dispersioni realistiche (15-30%) attorno a questo valore non cambiano le principali conclusioni (6). Assumendo una densità di clusters con effetto SZ pari a

$$\int \rho dR_0 = 10^{-8} \text{ Mpc}^{-3},$$

il numero di oggetti osservabili con $\theta \geq 30''$ risulta $N \gtrsim 10^5$ per $m \gtrsim 0$ ed $N \gtrsim 10^4$ per $m = -1$. Pertanto può essere trovato un numero di oggetti sufficiente a compiere accurate statistiche e a determinare empiricamente l'evoluzione di $R(z)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] SUNYAEV R. A., ZELDOVICH Y. B.: Comments Astrophys. Space Phys. 4, 173 (1972).
- [2] FABBRI R., MELCHIORRI F., NATALE V.: Astrophys. Space Sci. 59, 223 (1978).
- [3] CAVALIERE A., DANESE L., DE ZOTTI G.: Astrophys. J. 217, 6 (1977).
- [4] MELCHIORRI F., BOYNTON P.: Proposta Congiunta al CNR e NSF, 1977.
- [5] HICKSON P.: Astrophys. J. 217, 964 (1977).
- [6] FABBRI R., MELCHIORRI F., MENCARAGLIA F., NATALE V.: Astron. Astrophys. 74, L20 (1979).

D. FARGION(*)

STABILITY AND INSTABILITY OF MAGNETIC UNIVERSE.

Stabilità ed instabilità dei modelli cosmologici
con campo magnetico uniforme

Abstract

An homogenous cosmologic model Bianchi type I with an uniform magnetic field has been investigated; it has been shown that the general solution near the singularity has a Kasner behaviour «cigar-like».

Introduzione.

Nell'ultimo decennio alcuni autori [1-7] hanno analizzato i modelli cosmologici omogenei con campo magnetico uniforme nell'aspetto sia matematico sia fisico. La motivazione di questa ricerca è la presenza inspiegabile dei campi magnetici galattici; tali campi infatti richiederebbero tempi tipici di rilassamento di alcuni ordini di grandezza superiori all'età dell'Universo. Questo fenomeno è connesso all'alta elettroconduttività del plasma intergalattico e dalla ben nota conservazione del flusso magnetico, il cosiddetto «congelamento» del campo magnetico nel plasma.

L'analisi asintotica generale degli spazi omogenei di Bianchi (1918) nella cosmologia è stata avviata già nel lontano 1921 da E. Kasner [9] ed è stata completata nel 1970 dopo una lunga collezione di lavori [10-15]. I modelli di Bianchi I, a simmetria assiale con materia e campo magnetico sono stati affrontati da Thorne [16] (1967), ed altri [1-6].

Un risultato generale offerto dall'analisi asintotica di questo modello è la caratteristica singolarità a «pancake» in cui i due fattori di scala sulla sezione spaziale isotropa ($b = c$), ortogonali alla direzione del campo B , si arrestano frenati dal flusso magnetico, mentre il fattore di scala a , parallelo al campo B , continua il suo collasso verso la singolarità.

(*) Istituto di Fisica dell'Università di Roma.

Ciò corrisponde ad una soluzione particolare di Kasner, in cui l'elemento invariante più generale per $a = t^{P_1}$, $b = t^{P_2}$, $c = t^{P_3}$, del tipo: $ds^2 = dt^2 - a^2 dx^2 - b^2 dy^2 - c^2 dz^2$, assume esponenti $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$. Questo risultato è stato verificato per una generale equazione di stato in cui $p = (\gamma - 1) \rho$, $4/3 > \gamma > 1$; da Collins [7] (1972) grazie allo studio qualitativo dell'equazione in campo.

Noi abbiamo generalizzato tale analisi per un modello di Bianchi I. completamente anisotropo ($b \neq c$) verificando che la soluzione generale intorno alla singolarità non è a «pancake» bensì a «sigaro»; cioè in generale il fattore di scala a parallelo al campo B , e b (ovvero c) collassano: $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 < 0$; (ovvero $p_1 > 0$, $p_2 < 0$, $p_3 > 0$), mentre c (ovvero b) esplode all'infinito analogamente alle soluzioni generali di Kasner in cui gli esponenti non siano tra loro uguali. Per una equazione di stato generica $p = (\gamma - 1) \rho$, le equazioni di campo delle componenti G_1^1 , G_2^2 , G_3^3 diventano:

$$x = \frac{\rho}{\rho_c}; \quad \rho_c \equiv 3 \dot{\Omega}^2; \quad \Omega \equiv -\frac{1}{3} \ln(a \cdot b \cdot c),$$

$$y' = \frac{d^2 \beta_1}{d \Omega^2}, \quad z' = \frac{d^2 \beta_2}{d \Omega^2}$$

(vedi inoltre ref. 7 eq. 2.4, 2.2, 2.3):

$$(1.1) \quad x' = \frac{x}{2} [2(3\gamma - 4)(1 - x) - (y^2 + z^2)]$$

$$(1.2) \quad y' = \frac{y}{2} [4 - 2(3\gamma - 4)x - (y^2 + z^2)] - [4 - 4x - (y^2 + z^2)]$$

$$(1.3) \quad z' = \frac{z}{4} [4 - 2(3\gamma - 4)x - (y^2 + z^2)]$$

La densità di energia relativa al campo magnetico è sostituita grazie all'integrale primo relativo alla componente G_0^0 , relazione che lega x , y , z a $|B|^2$:

$$y^2 + z^2 = 4(1 - x) - \frac{4}{3} \left(\frac{|B|^2}{8 \pi \dot{\Omega}^2} \right)$$

(vedi ref. 7, eq. 2.5). Questo integrale primo definisce un volume di un paraboloide nello spazio xyz entro il quale si dovranno muovere tutte le linee di flusso.

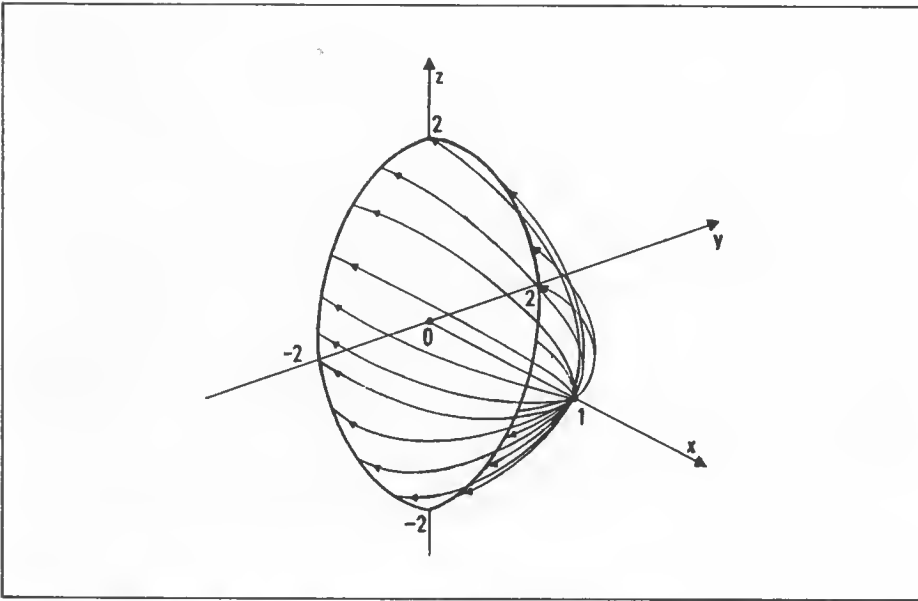


Figura 1. Linee di flusso sul paraboloide in assenza del campo magnetico.

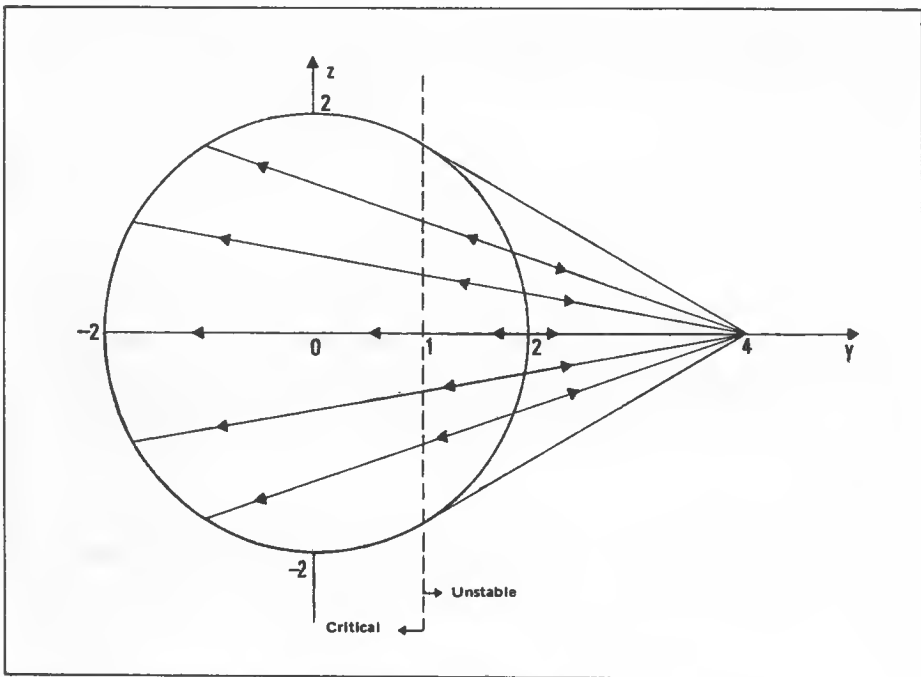


Figura 2. Linee di flusso di un Universo magnetico in assenza di materia ($x = 0$).

In assenza del campo magnetico le linee integrali si muovono sul paraboloide $y^2 + z^2 = 4(1 - x)$ partendo (per $t \rightarrow +\infty$, $\Omega \rightarrow -\infty$) da $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ e terminando per ($t \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow +\infty$) sul cerchio $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$ (vedi fig. 1), mentre in presenza del campo magnetico le linee integrali pur partendo da $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, terminano nel settore del cerchio in cui $y < 1$ (vedi fig. 2).

Perciò è interessante osservare le linee di flusso nella superficie $x = 0$, ovvero in assenza di materia; l'analisi qualitativa del sottosistema (1.2, 1.3) deve tener conto dei termini non lineari dato che uno degli autovalori che soddisfano l'equazione caratteristica del sistema linearizzato, è nullo.

Tale analisi da noi condotta [17] dimostra che i termini non lineari non perturbano il sistema nelle sue componenti lineari e perciò i punti di equilibrio lungo il cerchio $y^2 + z^2 = 4$ mentre sono asintoticamente stabili nella direzione definita dalle separatrici, sono stabili (ma non asintoticamente) nelle direzioni localmente tangenti al cerchio. Un piano di particolare interesse è quello in cui $z = 0$, ovvero il caso a simmetria assiale accennato precedentemente.

L'analisi qualitativa del sistema 1.1, 1.2 in tal caso presenta le linee di flusso descritte a fig. 2 di ref. 7. Perciò il punto $y = -2$, $z = 0$, $x = 0$, riveste un'importanza rilevante essendo l'intersezione del cerchio $y^2 + z^2 = 4$ e $z = 0$ ed avendo un carattere di punto asintoticamente stabile (nel piano $z = 0$); tale punto è proprio la soluzione particolare a «pancake» corrispondente ad una soluzione di Kasner a simmetria assiale in cui $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$; inoltre questo genere di singolarità è fittizia poiché in opportune coordinate ($\xi = t \sinh x$, $\tau = t \cosh x$) la metrica è Minkowskiana. La nostra indagine verifica che sotto perturbazione lungo la direttrice ortogonale al piano $z = 0$ il sistema non è asintoticamente stabile e perciò la soluzione a «pancake» è instabile. E' utile sottolineare che il campo magnetico vieta una soluzione a sigaro dove $a_{\parallel B} = t^{p_1}$ in cui $p_1 < 0$ come indicato dal carattere repulsivo delle linee di flusso per $y > 1$.

Per concludere si può ricordare che i modelli omogenei di Bianchi che ammettono una direzione preferenziale sono [8] i Bianchi I, II, III, VI _{$h=-1$} , VII _{$h=0$} , e quindi questi modelli non presentano una singolarità oscillante come per esempio nei casi tipo IX o VIII [15], bensì, dopo una successione finita di ere kasneriane, essi presentano una singolarità analoga alla soluzione di Kasner dove i termini nelle equazioni di campo connessi alle costanti di struttura non sono più dominanti.

Perciò la fase iniziale della singolarità deve avere le stesse caratteristiche del modello Bianchi I e tutte le conseguenze da noi derivate possono perciò estendersi ai casi più generali dei modelli omogenei con campo magnetico uniforme.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ZEL'DOVICH Ya. B. (1965); Sov. Phys. Jept. 21, 656.
- [2] ZEL'DOVICH Ya. B. (1969); Sov. Astron. A. J. 13, 608.
- [3] DOROSHKEVICH (1965); Astrophysics Vol. 1, n. 3, pag. 138.
- [4] SHIKIN I. S. (1966); Sov. Phys. - Doklady, vol. 11, 11.
- [5] KENNETH G. JACOBS (1967); Astroph. Journal, vol. 153, 661.
- [6] KENNETH G. JACOBS (1968); Astroph. Journal, 155, 379.
- [7] COLLINS C. B. (1972); *Qualitative Magnetic Cosmology*, Comm. Math. Phys., 27, 37.
- [8] KENNETH G. JACOBS and LANS P. HUGSTON (1969); Astroph. Journal, 160, 147.
- [9] KASNER E. (1921); Amer. J. Math. 43, 217.
- [10] TAUB A. H. (1951); Ann. Math. 53, 472.
- [11] RAYCHAUDHURI A. (1955); Phys. Rev. 98, 1123.
- [12] HECKMANN O. SHUCKING E. (1962), in Witten: *Relativistic Cosmology*.
- [13] MISNER C. W. (1968); Astrophys. J., 151, 431.
- [15] BELINSKII V., KHALATNIKOV I. M. (1969); Sov. Phys. Jept. 29, 911; (1970) Sov. Phys. Jept. 30, 1174; (1971) Sov. Phys. Jept. 32, 169; BELINSKII V., LIFSHITZ E. M., KHALATNIKOV I. M. (1972); Sov. Phys. Jept. 35, 838.
- [16] THORNE Kip. S. (1967); Astrophys. Journal, 148, 51.
- [17] FARGION D., Preprint INFN n. 104, Sept. 1978.

PAOLO FARINELLA (*), ANDREA MILANI (**), ANNA M. NOBILI (***)

A METHOD TO MEASURE THE GRAVITATIONAL CONSTANT IN AN ORBITING LABORATORY.

Abstract.

We propose to measure the universal constant G in an orbiting environment by tracking the motion of a test mass under the gravitational influence of a known mass of very high density. We analyse the different sources of perturbations and conclude that this method can allow the determination of the fifth significant digit of G .

La costante gravitazionale G è, tra le costanti universali, quella nota con il minor numero di cifre significative: a tutt'oggi, il suo valore più accurato è $G = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2} \text{ g}^{-1}$ (Heyl e Chrzanowski, 1942), ma una stima attendibile dell'errore deve essere assai più pessimistica (dell'ordine di qualche parte su 10^3), data la probabile permanenza di errori sistematici nelle misure effettuate (Stephenson, 1967; Sagitov, 1969). Una determinazione più precisa di G sembra necessaria in quanto ad essa è collegata la conoscenza della massa e della densità di tutti i corpi celesti (compresa la Terra); d'altra parte, vi sono limitazioni fondamentali alle misure di piccole forze sulla superficie terrestre, dovute essenzialmente al rumore determinato dalle vibrazioni sismiche (Braginski e Manukin, 1977). Nello spazio queste limitazioni vengono a cadere, come dimostra il fatto che G è stata determinata con enorme precisione in unità astronomiche tramite i metodi della meccanica celeste; di conseguenza, sembra logico proporre un esperimento per la determinazione di G in un laboratorio orbitante (Vinti, 1971).

Il metodo da noi proposto consiste nel portare in orbita terrestre una sfera

(*) Osservatorio Astronomico di Brera, Merate (Como).

(**) Istituto di Matematica «L. Tonelli», Università di Pisa.

(***) Istituto di Scienze dell'Informazione, Università di Pisa.

di materiale ad elevata densità la cui massa sia nota con precisione, e nel misurare la traiettoria di una «particella di prova» nel campo gravitazionale della massa principale (e degli altri corpi circostanti). Il gradiente di gravità della Terra non può essere considerato come una piccola perturbazione, per cui occorre usare un modello a tre corpi per prevedere qualitativamente il comportamento dinamico del sistema; in seguito, per analizzare i dati e ricavarne il valore di G , saranno necessarie integrazioni numeriche delle equazioni del moto con un sistema iterativo di correzioni differenziali.

Se si impiega il problema ristretto dei tre corpi, confrontando il valore della costante di Jacobi della massa di prova con quello relativo alla curva di Hill singolare che passa per il punto lagrangiano L_2 , si mostra che non è possibile ottenere orbite stabili intorno alla massa principale operando in orbita terrestre «bassa» (cioè di raggio orbitale inferiore a ~ 2 raggi terrestri). D'altra parte, per ottenere una misura accurata di G occorre che la massa di prova rimanga quanto più a lungo possibile nelle vicinanze della massa principale, dato che lo spostamento cumulativo in un tempo t della massa di prova sotto l'effetto dell'errore ammesso per l'accelerazione gravitazionale è $c t^2 r^3 d^{-2}$, dove r è il raggio della massa principale, d è la distanza media fra i centri delle due masse e c è un coefficiente dell'ordine di 10^{-11} in unità CGS. Si propone perciò di sfruttare la «stabilità pratica» (nel sistema di riferimento rotante) dei punti di equilibrio collineari, ponendo la massa di prova in condizioni iniziali il più possibile prossime a quelle di un'orbita appartenente alla «varietà stabile», che per $t \rightarrow +\infty$ si avvicini indefinitamente al punto di equilibrio instabile L_2 . Usando le equazioni linearizzate del moto si può vedere che la velocità di allontanamento da L_2 è compatibile con una durata dell'esperimento dell'ordine di alcune migliaia di secondi, purché si usi un dispositivo molto preciso (basato ad esempio sulla pressione di radiazione, con un controllo interferometrico della posizione) per «lanciare» la particella con la giusta velocità iniziale. La durata suddetta è sufficiente per misurare la quinta cifra significativa di G , usando lastre fotografiche con la risoluzione di qualche micron per determinare la traiettoria.

Durante lo svolgersi dell'esperimento, il sistema deve rimanere in caduta libera all'interno di un involucro che schermi tutte le forze non gravitazionali (in particolare l'attrito atmosferico, la cui variabilità rende difficile prevederne teoricamente gli effetti). A questo scopo, è necessario porre con precisione la massa principale nel punto di equilibrio delle forze all'interno del laboratorio (per evitare un consistente moto relativo rispetto all'involucro), oppure occorre usare in modo attivo il controllo di assetto per spostare la nave spaziale rispetto alla massa principale.

Questo tipo di sistema drag-free, che consente ampi moti relativi, è oggi tecnologicamente realizzabile, anche se evidentemente lo spazio all'interno di un

laboratorio orbitante risulta molto costoso (un miglioramento da questo punto di vista sarà reso possibile dall'entrata in funzione dello space shuttle). D'altra parte, si tratta degli stessi metodi sperimentali che sono necessari per misurare la struttura fine del campo gravitazionale terrestre (esperimenti di «satellite geodesy»). In questo campo, una tecnica alternativa che potrebbe risultare più conveniente è quella del tipo «sky-hook», già proposta per altri scopi.

BIBLIOGRAFIA

BRAGINSKI V. B. e MANUKIN A. B.: 1977, *Measurements of Weak Forces in Physics Experiments*, University of Chicago Press, Chicago e Londra.

HEYL P. R. e CHRZANOWSKI P.: 1942, J. Res. Natl. Bur. Std. (US) 29, 1.

STEPHENSON L. M.: 1967, Proc. Phys. Soc. (London) 90, 601.

SAGITOV M. U.: 1969, Astronom. Zh. 46, 907.

VINTI J. P.: 1972, Celes. Mech. 5, 204.

MARCO FERRARIS (*)

IMMERSIONI ALGEBRICHE ISOMETRICHE DI SOLUZIONI ESATTE DELLE EQUAZIONI DI EINSTEIN.

Abstract.

We present some results about isometric embeddings of the Schwarzschild solution and a new result concerning an algebraic isometric embedding of the Einstein-Rosen solution for the field of a charged point mass.

Introduzione.

Il problema dell'immersione isometrica, in uno spazio pseudo-euclideo, delle soluzioni delle equazioni gravitazionali di Einstein nel vuoto fu affrontato per la prima volta da E. Kasner (ref. [1]) che dimostrò l'impossibilità di immergere isometricamente in un R^5 pseudo-euclideo una qualsiasi soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto: $G_{ij} = 0$. (Tale immersione isometrica si può invece effettuare per molte delle soluzioni cosmologiche attualmente note).

In un successivo articolo, Kasner diede esplicitamente una isometria locale (che però non è una immersione) della soluzione esterna di Schwarzschild, la cui metrica (in coordinate polari) è:

$$(1) \quad ds^2 = -(1 - 2m/r) dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 + \\ + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

(con $r > 2m$) in una sottovarietà analitica di un R^6 pseudo-euclideo con metrica di segnatura (4,2) (ref. [2]).

Un ulteriore progresso fu ottenuto da C. Fronsdal (ref. [3]) che modificò l'immersione di Kasner sostituendo le funzioni trigonometriche del tempo con funzioni iperboliche, ottenendo così un'immersione isometrica (globale) della soluzione esterna di Schwarzschild in un aperto di una sottovarietà analitica di un R^6 pseudo-euclideo di segnatura (5,1). L'immersione di Fronsdal è la seguente:

(*) Istituto di Fisica Matematica, Università di Torino.

$$\begin{aligned}
 x^1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\
 x^2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\
 x^3 &= r \cos \vartheta, \\
 (2) \quad x^4 &= \int_{2m}^r (2m/z + (2m/z)^2 + (2m/z)^3)^{1/2} dz, \\
 x^5 &= 4m (1 - 2m/r)^{1/2} \cosh (t/4m), \\
 x^6 &= 4m (1 - 2m/r)^{1/2} \sinh (t/4m),
 \end{aligned}$$

e la metrica dell' $\mathbf{R}^6$ è:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^5 (dx^i)^2 - (dx^6)^2.$$

La varietà analitica ottenuta da Fronsdal (con la metrica indotta) non è altro che l'estensione analitica massimale della soluzione di Schwarzschild. Tale estensione era stata scoperta poco tempo prima da M. D. Kruskal, anche se l'articolo relativo venne pubblicato un anno dopo quello di Fronsdal (ref. [4]).

§ 1. Studiando la soluzione esterna di Schwarzschild, abbiamo ottenuto un'immersione isometrica di tale soluzione in un aperto di una sottovarietà algebrica di un $\mathbf{R}^7$ pseudo-euclideo di segnatura (5,2) (ref. [5]). La varietà algebrica che si ottiene ha però dei punti multipli che corrispondono alla sfera di raggio $r = 2m$, ed in tali punti la metrica indotta dall' $\mathbf{R}^7$ è degenera (determinante dei coefficienti = 0).

Abbiamo quindi cercato di modificare l'immersione di Fronsdal in modo da ottenere come immagine un aperto di una sottovarietà algebrica. Il risultato è derivato automaticamente dalla constatazione che il quadrato del differenziale della funzione x^4 , nell'immersione (2), può essere espresso come somma dei quadrati dei differenziali di due funzioni che sono combinazioni lineari di $(2m/r)^{1/2}$ e $(r/2m)^{1/2}$. Si ottiene quindi la seguente immersione isometrica della soluzione esterna di Schwarzschild in un $\mathbf{R}^7$ pseudo-euclideo di segnatura (6,1):

$$\begin{aligned}
 y^1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\
 y^2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\
 y^3 &= r \cos \vartheta, \\
 (3) \quad y^4 &= (6m r)^{1/2},
 \end{aligned}$$

$$y^5 = 2m ((r/2m)^{1/2} - 2 (r/2m)^{-1/2}),$$

$$y^6 = 4m (1 - 2m/r)^{1/2} \cosh (t/4m),$$

$$y^7 = 4m (1 - 2m/r)^{1/2} \sinh (t/4m),$$

e la metrica dell' $\mathbf{R}^7$ è:

$$ds^2 = \sum_{j=1}^6 (dy^j)^2 - (dy^7)^2.$$

L'immagine, attraverso questa immersione, della soluzione esterna di Schwarzschild è un aperto della sottovarietà algebrica di $\mathbf{R}^7$ definita dalle seguenti equazioni:

$$(4) \quad \begin{aligned} (y^6)^2 - (y^7)^2 + 1/3 (y^4 - \sqrt{3} y^5)^2 &= 16 m^2 \\ (y^4)^4 &= 36 m^2 ((y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2), \\ (y^4 - \sqrt{3} y^5) y^4 &= 24 m^2. \end{aligned}$$

Come si può facilmente verificare, questa sottovarietà ha due componenti connesse ognuna delle quali è isometrica allo spazio-tempo di Kruskal. Si può inoltre vedere che gli unici punti multipli di tale varietà si trovano sull'iperpiano all'infinito (tra di essi vi è «ovviamente» la singolarità corrispondente a $r = 0$).

A questo punto, in collaborazione con Mauro Francaviglia, abbiamo cercato di individuare in quale modo si potessero inserire in questo contesto le soluzioni del tipo di quella di Schwarzschild scoperte da T. Levi-Civita e classificate (con le loro estensioni analitiche massimali) come soluzioni di tipo A1, A2, B1 e B2 da J. Ehlers e W. Kundt (ref. [6]). Abbiamo così appurato che il modo più naturale di unificare tutte queste soluzioni era quello di considerarle come «sezioni reali» di uno stesso «spazio-tempo complesso». Infatti, considerando la sottovarietà algebrica V di $\mathbf{C}^7$ definita dalle (4) con la «metrica complessa» indotta dalla restrizione a V del prolungamento analitico a $\mathbf{C}^7$ della metrica di $\mathbf{R}^7$ utilizzata nell'immersione (3), si vede che tale metrica complessa è non degenera su V . Otteniamo in questo modo una soluzione olomorfa delle equazioni di Einstein nel vuoto complessificate. Tale soluzione è priva di punti multipli e la metrica complessa indotta è ovunque non degenera, mentre le soluzioni ottenibili con lo stesso procedimento dalle due varietà da noi presentate in [5] hanno punti multipli ed in essi la metrica indotta (ovviamente) degenera.

Se consideriamo in $\mathbf{C}^7$ gli iperpiani reali a sette dimensioni ottenuti restringendo alcune delle coordinate (di $\mathbf{C}^7$) a valori reali e le rimanenti a valori immaginari, vedremo che alcune delle sezioni reali definite su V dall'intersezione con tali iperpiani sono isometriche alle estensioni analitiche massimali delle soluzioni

di tipo A1, A2, B1 e B2 con $m > 0$ ed $m < 0$.

I risultati degli studi relativi all'immersione algebrica isometrica dello spazio-tempo di Kruskal, allo spazio-tempo complesso che ne deriva e ad alcune delle sue sezioni reali sono raccolti in [7].

§2. In questi ultimi tempi, studiando una soluzione proposta da Einstein e Rosen (ref. [8]) per il campo gravitazionale di una massa puntiforme elettricamente carica, la cui espressione è:

$$(5) \quad ds^2 = -(1 - 2m/r - \epsilon^2/r^2) dt^2 + (1 - 2m/r - \epsilon^2/r^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

siamo riusciti a dimostrare che è possibile immergere isometricamente questa soluzione in una sottovarietà algebrica di un R^{11} pseudo-euclideo di segnatura (7,4). Ponendo $r_{\pm} = (m^2 + \epsilon^2)^{1/2} \pm m$ ed $A = 2 r_+^2 / (r_+ + r_-)$, l'immersione ha la seguente espressione:

$$(6) \quad \begin{aligned} z^1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z^2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z^3 &= r \cos \vartheta, \\ z^4 &= (3r_+ (r + r_-))^{1/2}, \\ z^5 &= r_+ ((r/r_+)^{1/2} - 2(r/r_+)^{-1/2}), \\ z^6 &= r_+ (1 + 2r_+/r)((r + r_-)/r_+)^{1/2}, \\ z^7 &= A ((1 - r_+/r)(1 + r_-/r))^{1/2} \cosh(t/A), \\ z^8 &= A ((1 - r_+/r)(1 + r_-/r))^{1/2} \sinh(t/A), \\ z^9 &= r_+ (1 + 2r_+/r)(r/r_+)^{1/2}, \\ z^{10} &= 2r_+ r_- (r_+ (2r_+ + r_-))^{1/2} / (r_+ + r_-) r, \\ z^{11} &= 2 (r_- (r + r_-))^{1/2}, \end{aligned}$$

e la metrica su R^{11} è:

$$ds^2 = \sum_{k=1}^7 (dz^k)^2 - \sum_{k=8}^{11} (dz^k)^2.$$

Passando al limite per la carica che tende a zero ($\epsilon \rightarrow 0$) si ottiene ancora l'immersione (3) per lo spazio-tempo di Kruskal. Infatti, quando $\epsilon = 0$, si ha:

$r_+ = 2m$, $r_- = 0$, $A = 2r_+ = 4m$ e l'immagine di (6) è allora contenuta in un sottospazio vettoriale di dimensione sette (in quanto si ha: $z^{11} = z^{10} = 0$, $z^9 = z^6 =$ combinazione lineare di z^4 e z^5); scegliendo opportunamente la base ortonormale di questo sottospazio di dimensione sette si riottiene l'immersione (3).

Conclusioni.

Siccome la soluzione di Reissner-Nordström per una massa puntiforme elettricamente carica si può ottenere da quella di Einstein-Rosen con la trasformazione $\epsilon \mapsto ie$ (il caso in cui ci sono due orizzonti corrisponde a $r_- < 0$) ci sono fondate speranze di ritrovarla come sezione reale dello spazio-tempo complesso associato all'immersione (6). Questo ci potrebbe eventualmente permettere di ottenere un'estensione analitica massimale diversa da quella classicamente nota.

BIBLIOGRAFIA

- [1] KASNER E.: Am. J. Math. 43, 126 (1921).
- [2] KASNER E.: Am. J. Math. 43, 130 (1921).
- [3] FRONSDAL C.: Phys. Rev. 116, 778 (1959).
- [4] KRUSKAL M. D.: Phys. Rev. 119, 1743 (1960).
- [5] FERRARIS M., FRANCAVIGLIA M.: Atti Acc. Sci. Torino 111, 315 (1976-1977).
- [6] EHLERS J., KUNDT W.: *Exact solutions of gravitational field equations*, in «Gravitation: an introduction to current research», ed. by L. Witten, John Wiley & Sons (1962).
- [7] FERRARIS M., FRANCAVIGLIA M.: *An algebraic isometric embedding of Kruskal space-time* (1977), GRG Journal 10 (4), 283 - 296 (1979).
- [8] EINSTEIN A., ROSEN N.: Phys. Rev. 48, 73 (1935).

P. FORTINI (*), F. FULIGNI (**), C. GUALDI (***)

SULL'ESISTENZA DI RADIAZIONE GRAVITAZIONALE ANTICIPATA.

In un recente lavoro [1] gli autori hanno investigato la possibilità di verificare la teoria di Wheeler-Feynman [2] estesa da Rosen [3] alle onde gravitazionali. Tale teoria afferma che, se la materia dell'universo non è sufficiente per assorbire la radiazione emessa da un sistema, si deve potere rivelare la radiazione anticipata. Ora la materia dell'universo può assorbire completamente la radiazione elettromagnetica e quindi, in questo ambito, non è possibile verificare sperimentalmente l'esistenza delle soluzioni in $t + r/c$ delle equazioni di Maxwell. Come però ha mostrato Rosen [3], le onde gravitazionali, che, nell'approssimazione lineare, obbediscono ad equazioni analoghe a quelle di Maxwell, non vengono assorbite e quindi la parte anticipata rimane presente e può venire rivelata. Una possibilità di rivelazione è offerta da una sorgente distante che emette sia radiazione elettromagnetica che gravitazionale; ad esempio una pulsar asimmetrica o un sistema binario con due stelle di neutroni quale PSR 1913 + 16.

Se non esiste radiazione anticipata, le onde gravitazionali e quelle elettromagnetiche viaggiano nella stessa direzione e quindi (vedi ad esempio Cooperstock [4]) non interagiscono. Se però tale radiazione esiste vi sarà interazione tra la parte avanzata dell'onda gravitazionale (che si muove verso la sorgente) e l'onda elettromagnetica (che proviene dalla sorgente).

Scriviamo l'onda elettromagnetica nella forma:

$$\begin{aligned} F_{10}^{(0)} &= E_x^{(0)} = E \cos(ky - \omega t) \\ F_{12}^{(0)} &= B_z^{(0)} = -E \cos(ky - \omega t) \end{aligned}$$

e l'onda gravitazionale nella forma:

(*) Istituto di Astronomia dell'Università di Bologna, Istituto di Fisica dell'Università di Ferrara.

(**) Laboratorio gas ionizzati, CNR, Frascati, Roma.

(***) Istituto di Fisica dell'Università di Ferrara.

$$h_{11} = -h_{33} = A [\cos(k_g y - w_g t) + \cos(k_g y + w_g t)]$$

$$h_{13} = h_{31} = B [\sin(k_g y + w_g t) + \sin(k_g y - w_g t)]$$

ove F_{ik}^0 è il tensore elettromagnetico imperturbato ed h_{ik} è il tensore simmetrico che rappresenta l'onda gravitazionale.

Quest'ultima quantità, che si suppone molto minore di 1, è definita da

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$$

ove g_{ik} è il tensore metrico e $g_{ik}^{(0)}$ è il tensore di Minkowski.

Se indichiamo con $F_{ik}^{(1)}$ il tensore elettromagnetico perturbato, esso soddisfa alle equazioni [4]:

$$\begin{aligned} F_{i,k}^k &= h_r^s F_{sr}^{(0)} + h^{rs} F_{ir,s}^{(0)} \\ F_{ik,m}^{(1)} + F_{mi,k}^{(1)} + F_{km,i}^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

Queste equazioni possono essere risolte rigorosamente e si ottiene:

$$F_{10}^{(1)} = \frac{AE}{2k} [k_g \sin(k_g y + w_g t) \sin(ky - wt) +$$

$$+ k \cos(k_g y + w_g t) \cos(ky - wt)]$$

$$F_{12}^{(1)} = \frac{AE}{2k} [k_g \sin(k_g y + w_g t) \sin(ky - wt) -$$

$$- k \cos(k_g y + w_g t) \cos(ky - wt)]$$

$$F_{30}^{(1)} = \frac{BE}{2k} [-k_g \cos(k_g y + w_g t) \sin(ky - wt) +$$

$$+ k \sin(k_g y + w_g t) \cos(ky - wt)]$$

$$F_{23}^{(1)} = \frac{BE}{2k} [k_g \cos(k_g y + w_g t) \sin(ky - wt) +$$

$$+ k \sin(k_g y + w_g t) \cos(ky - wt)]$$

Mediando su un periodo dell'onda elettromagnetica, che è molto minore di quello dell'onda gravitazionale, otteniamo per la densità di energia perturbata W :

$$W = W^0 [1 + A \cos(k_g y + w_g t)]$$

ove W^0 è la densità di energia imperturbata. Questo risultato mostra che la densità

di energia elettromagnetica viene modulata dall'onda gravitazionale e che questa modulazione si propaga verso la sorgente. La rivelazione di tale effetto è ancora al di fuori delle possibilità attuali. Esiste tuttavia un fenomeno, rivelabile in PSR 1913 + 16, che permette di dare una verifica indiretta della teoria esposta. Infatti se le onde gravitazionali esistono solamente come radiazione ritardata, esse trasportano energia e producono una diminuzione del periodo binario del sistema; se invece esiste anche la radiazione anticipata, l'energia emessa dal sistema viene esattamente compensata da essa, formandosi in tal caso un'onda gravitazionale stazionaria.

Recenti misura di Taylor [5] sembrano evidenziare l'esistenza di una diminuzione del periodo dell'ordine di grandezza previsto dalla teoria di Einstein per emissione di onde gravitazionali. Se tale risultato verrà confermato costituirà la prima evidenza dell'esistenza di tali onde e al tempo stesso, una prova della non validità dell'ipotesi della radiazione anticipata. Infatti è molto improbabile che la quantità di materia dell'universo possa essere tanta quanto è necessaria per avere assorbimento completo delle onde gravitazionali poiché questo dovrebbe superare di molti ordini di grandezza il limite imposto dalle moderne ricerche cosmologiche.

Concludendo si può affermare che, se i risultati di Taylor verranno confermati, la teoria di Wheeler-Feynman verrebbe invalidata anche per quel che riguarda la sua applicabilità alle onde elettromagnetiche, stante la descrizione formalmente identica sia della radiazione elettromagnetica che di quella gravitazionale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FORTINI P., FULIGNI F., GUALDI C., *Lettere al Nuovo Cimento* 23, 345 (1978).
- [2] WHEELER J. A., FEYNMAN R. P., *Rev. Mod. Physics* 17, 157 (1945).
- [3] ROSEN N.: *Lettere al Nuovo Cimento* 19, 249 (1977).
- [4] COOPERSTOCK F. I., *Ann. of Phys.* 47, 173 (1968).
- [5] TAYLOR J., FOWLER L., McCULLOCH P., Preprint.

RICCARDO GOLDONI (*)

UN CONTESTO PURAMENTE GEOMETRICO PER DESCRIVERE LA GRAVITA' E L'INERZIA.

Abstract.

We state a purely geometrical framework apparently implementing Machian ideas on inertia and including only coupling constants *dimensionless* in natural units. The gravitational field equations in *gravitational units* turn out to be identical to Einstein's equations, while the equations describing the gravitational field in *local atomic units* are integrodifferential equations in agreement with the available experimental data.

Nella letteratura moderna si trovano essenzialmente tre diverse formulazioni del Principio di Mach. Una di queste è la cosiddetta formulazione *debole* in base alla quale il principio di Mach è considerato come un principio selettore per ottenere (attraverso opportune condizioni al contorno) le soluzioni fisiche delle equazioni di Einstein (cf. ad esempio, ref. 1-4). La seconda è la cosiddetta formulazione *forte* in base alla quale almeno alcune delle idee Machiane sono richieste di essere esplicitamente incorporate nelle equazioni gravitazionali, in accordo col pensiero originale di Einstein (cf. ad esempio, ref. 5-12). La terza formulazione (che chiameremo *debole-forte*) può essere considerata intermedia tra le prime due nel senso che le soluzioni fisiche delle equazioni di Einstein sono ottenute essenzialmente attraverso una opportuna rappresentazione integrale di esse (cf. ref. 13-17).

Secondo il nostro punto di vista nessuno degli approcci sopra citati può essere considerato completamente soddisfacente (cf. la discussione in ref. 7). Lo scopo di questo lavoro (che è apparso per esteso nelle ref. 18-20) è di compiere un ulteriore passo nella ricerca di un contesto puramente geometrico che implementi il principio di Mach *forte*, piuttosto che di formulare una teoria completa

(*) Istituti di Matematica e di Scienze dell'Informazione dell'Università, 56100 Pisa; G.N.F.M. del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

della gravitazione. Le equazioni gravitazionali che proporremo possono essere ottenute attraverso due procedimenti essenzialmente diversi. Il primo procedimento segue una idea guida piuttosto simile a quella seguita da Einstein nella sua prima formulazione della Relatività Generale e consiste nel trovare una estensione generalmente covariante di una opportuna forma equivalente dell'equazione gravitazionale di Newton in un sistema di riferimento non inerziale. Il secondo procedimento è basato su considerazioni di natura più generale che, in particolare, sono completamente divorziate dalla teoria Newtoniana. In questa Comunicazione accenneremo solo quest'ultimo procedimento in quanto esso permette una più immediata interpretazione fisica dei risultati.

Notiamo che in questo lavoro si assume che gli indici sia abbassati o alzati mediante il tensore metrico $g = \{g_{ab}\}$ o il suo inverso $g^{-1} = \{g^{ab}\}$, eccetto per quelle quantità fisiche marcate con un superscritto (ad esempio un « $\hat{}$ ») per le quali si conviene di usare il tensore metrico marcato con lo stesso superscritto (cioè $\hat{g} = \{\hat{g}_{ab}\}$) o il suo inverso $\hat{g}^{-1} = \{\hat{g}^{ab}\}$.

In un contesto Machiano è naturale assumere che la materia presente singolarizzi un tempo cosmologico fondamentale θ , una lunghezza cosmologica fondamentale Σ e una azione cosmologica fondamentale S , peculiari della distribuzione data di materia. In unità di misura arbitrarie θ , Σ e S possono dipendere sia dal punto x che dalla direzione $[dx] = \{dz : dz = adx, a \neq 0\}$ dello spazio-tempo ($s-t$). θ e Σ singolarizzano una velocità caratteristica $\nu = \Sigma/\theta$ peculiare della distribuzione di materia data.

Siano $dV = dV(x, [dx])$ e $dU = dU(x, [dx])$ rispettivamente l'intervallo di tempo e la distanza spaziale osservabili in unità di misura arbitrarie e sotto l'ipotesi che gli orologi siano sincronizzati con segnali che viaggiano alla velocità ν (cf. ref. 21 e 22). Si può introdurre naturalmente nello $s-t$ un elemento di linea ds avente le dimensioni di una lunghezza: $ds^2 = \nu^2 dV^2 - dU^2$. Moltiplicando entrambi i membri di tale equazione per il fattore conforme Σ^{-2} , si ottiene un elemento di linea adimensionato dato da $ds^{*2} = \theta^{-2} dV^2 - \Sigma^{-2} dU^2 \equiv dV^{*2} - dU^{*2}$, dove dV^* e dU^* sono rispettivamente i valori dell'intervallo di tempo e della distanza spaziale osservabili misurati in unità cosmologiche fondamentali (u.c.f.). In base al principio di Mach, le u.c.f. appaiono le più naturali per ottenere informazioni sulla cosmologia e la gravitazione. Quindi, assumiamo che in tali unità l'elemento di linea sia Riemanniano e abbia segnatura -2 , cioè assumiamo che $ds^{*2} = g_{ab}^* dx^a dx^b$, dove $g^* = \{g_{ab}^*\}$ ha le dimensioni di una lunghezza alla -2 in unità cosmologiche naturali (u.c.n.), cioè in unità tali che $\nu = 1 = S$.

In u.c.n. l'azione I di un arbitrario sistema dinamico,

$$I = \int d^4x \mathcal{A},$$

è *adimensionata* e, quindi, la densità lagrangiana $\mathcal{A}$ è una densità scalare di peso -1 avente le dimensioni di una lunghezza alla -4 . Definiamo nella varietà Riemanniana (M^4, g^*) , cioè in u.c.f., $\mathcal{A} = \sqrt{-g^*} A^*$, dove $g^* = \det g^*$ e A^* è, per definizione, la lagrangiana del sistema dinamico in (M^4, g^*) . A^* è *adimensionata* in u.c.n.. In u.c.n., quindi, sia la lagrangiana della materia in (M^4, g^*) (cioè L_{M^*}) e la lagrangiana del campo gravitazionale in (M^4, g^*) (cioè L_{g^*}) sono *adimensionate*. Con procedura standard si ottiene $L_{g^*} = -(1/2\beta)(R^* - 2\Lambda^*)$, dove R^* indica la curvatura scalare in (M^4, g^*) e sia β che Λ^* sono costanti *adimensionate* in u.c.n.. Assumendo inoltre che L_{M^*} dipenda solo da g^* e dalle variabili dinamiche che descrivono la materia, dal principio variazionale segue, con procedura standard, che le equazioni di campo in u.c.f. sono

$$(1) \quad G^{*mn} + \Lambda^* g^{*mn} = -\beta T^{*mn},$$

dove $\delta I_M / \delta g^* = (1/2) \sqrt{-g^*} T^*$, I_M indica l'azione della materia, G^{*mn} il tensore di Einstein in (M^4, g^*) e, estendendo la definizione standard [23], $T^* = \{T^{*mn}\}$ si può interpretare come il tensore di energia-impulso in (M^4, g^*) , cioè in u.c.f.. T^* ha le dimensioni di un lunghezza quadrata in u.c.n..

In base al principio di Mach ogni sistema di unità (s.u.) basato *solo* sui fenomeni gravitazionali e scelto usando regole indipendenti dalla direzione dello s - t , dovrebbe essere un *sistema gravitazionale* di unità (s.g.u.), cioè un s.u. tale che θ , Σ e S possono dipendere solo da x . In particolare, ogni s.g.u. scelto usando le stesse regole in ogni intorno dello s - t dovrebbe essere un *sistema gravitazionale uniforme* di unità (s.g.u.u.), cioè un s.u. tale che θ , Σ e S sono costanti.

In un s.g.u.u. l'elemento di linea $d\mathcal{S}$ è dato da $d\mathcal{S}^2 = d\mathcal{S}^{\circ 2} = g_{mn}^{\circ} dx^m dx^n$, dove $g^{\circ} = \{g_{mn}^{\circ}\} = \Sigma^{\circ 2} g^*$, con $\Sigma^{\circ} = \text{cost.}$, e le equazioni gravitazionali, ottenute operando la trasformazione conforme ora definita sull'equazione (1), si identificano con quelle di Einstein. Al contrario, in ogni s.g.u. le eq. (1) si riducono a quelle di Brans-Dicke [5] per il valore singolare $\omega = -3/2$.

In base al principio di Mach, non ci si può aspettare di osservare effetti Machiani in Natura usando s.u. basati sui fenomeni gravitazionali. Per osservare tali effetti e, più in generale, per dare una descrizione completa dei fenomeni gravitazionali, è necessario usare anche s.u. basati sulla microfisica. E' ben noto che la microfisica singolarizza una velocità caratteristica c (cioè la velocità della luce nel vuoto) e una azione caratteristica $\hbar$, insieme a unità peculiari per le distanze spaziali e gli intervalli temporali. Quindi, guardando ai fenomeni atomici locali, siamo indotti a introdurre un elemento di linea $d\mathcal{S}$ avente le dimensioni di una lunghezza e definito da $d\mathcal{S}^2 = c^2 dT^2 - d\sigma^2$, dove $dT = dT(x, [dx])$ indica l'intervallo di tempo osservabile misurato per mezzo di orologi sincronizzati con la velocità c e $d\sigma = d\sigma(x, [dx])$ è ora usato per indicare la distanza spaziale osservabile. Nota che in un Cosmo concepibile arbitrario c è a priori *diversa* da v .

Ogni «sistema uniforme di unità atomiche» (s.u.u.a.) (definito come un s.u. in cui sia le unità atomiche peculiari per distanze e tempi [e, conseguentemente, anche c] che $\hbar$ sono costanti) è un sistema privilegiato di unità e, quindi, è naturale assumere che in tale s.u. dS sia Riemanniano, cioè $dS^2 = ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n$, con g avente segnatura -2 . Definiamo un tensore $K = \{K_n^m\}$ tale che $g_{ab}^* = K_a^m K_b^n g_{mn}$. K ha le dimensioni di una lunghezza alla -1 e descrive sia la connessione tra le misure delle distanze e tempi in u.c.f. e la loro misura in un s.u.u.a., che la connessione tra v e c . K risulta quindi descrivere l'imprint del Cosmo sulla struttura locale. Definendo quindi il tensore energia-impulso $T = \{T^{mn}\}$, in (M^4, g) , cioè in un s.u.u.a., in accordo con la regola standard (cf. ref. 23) $\delta I_M / \delta g = (1/2) \sqrt{-g} T$, si trova $T^{mn} = |K| K^m_a K^n_b T^{ab}$, con $K = \det K$ e $g = \det g$, e, quindi, l'eq. (1) diventa

$$(2) \quad G^{*mn} + \Lambda^* H^m_a H^n_b g^{ab} = -\beta |H| H^m_a H^n_b T^{ab},$$

dove $H = \{H^m_a\} = K^{-1}$ e $H = \det H$.

Per determinare la dipendenza di K dal contenuto di materia nel Cosmo, notiamo dapprima che dall'eq. (1) segue, con procedura standard [24], che le particelle puntiformi viaggiano lungo le geodetiche di (M^4, g^*) il che suggerisce di assumere che l'interazione gravitazionale viaggi lungo le geodetiche nulle di (M^4, g^*) . Quindi, essenzialmente da tale ipotesi e dalla considerazione che T può essere determinato sulla base di una indagine di tutti i fenomeni *non* gravitazionali e contiene tutte le informazioni sulla struttura cosmologica che sono di origine non gravitazionale, segue che

$$(3) \quad K^{mn}(x) = \alpha \int \sqrt{-g^*(x')} d^4 x'$$

$$\delta^{(-)}(d^{*2}[x, x']) \psi(x, x') g_{m'}^{*m} g_{n'}^{*n} T^{m'n'}$$

dove α indica una costante di accoppiamento adimensionata in unità atomiche naturali (u.a.n.) (definite dalla condizione $c = 1 = \hbar$), $\delta^{(-)}$ la distribuzione ritardata di Dirac, $d^*[x, x']$ la distanza geodetica tra x e x' calcolata in (M^4, g^*) , $g_a^{*a} = g_a^{*a}(x', x)$ il bivettore di trasporto parallelo in (M^4, g^*) e $\psi(x', x)$ un biscalare da determinare in base alla richiesta di un accordo coi dati sperimentali. L'ipotesi più attrattiva (anche se, ovviamente, non unica in mancanza di ulteriori principi selettivi) in accordo con i dati sperimentali disponibili è $\psi(x', x) = [g_{ab}^*(x') T^{ab}(x')]^{-1/2}$. Le equazioni (2), insieme alla posizione (3) e alla definizione ora data di ψ , sono assunte descrivere i fenomeni gravitazionali in ogni s.u.u.a.

Per quanto riguarda le previsioni sperimentali dell'approccio sopra presentato,

notiamo che ogni previsione su esperimenti che coinvolgono *solo* misure puramente gravitazionali non può differire dalle previsioni della teoria di Einstein. Differenze tra le due teorie possono verificarsi solo per quanto concerne esperimenti non puramente gravitazionali. Le equazioni (2) sono supposte valere in ogni Cosmo concepibile e dipendono dalla distribuzione di materia cosmologica apparentemente in accordo col principio di Mach. Almeno per alcune strutture particolarmente semplici del background ci si aspetta che esse si riducano, almeno approssimativamente, a un insieme di equazioni puramente differenziali. La forma di tali equazioni e dell'accoppiamento gravitazionale effettivo dovrebbero fortemente dipendere dalla struttura cosmologica, così che per ricavare dalle eq. (2) delle previsioni sperimentali è opportuno fissare preliminarmente un ben definito modello cosmologico. A tale fine notiamo: i) che, essendo l'accoppiamento gravitazionale di Einstein espresso da una costante dimensionata in unità naturali, le equazioni di Einstein (considerate come equazioni che descrivono il campo gravitazionale in un s.u.u.a.) possono essere riconciliate col principio di Mach *solo se* esse sono considerate come le equazioni gravitazionali effettive valevoli in un Cosmo omogeneo (nello spazio e nel tempo) e isotropo, e ii) che le eq. (2) in un Cosmo omogeneo (nello spazio e nel tempo) e isotropo si riducono esattamente alle equazioni di Einstein con un accoppiamento gravitazionale effettivo $\beta_{eff} = 3\pi \alpha / \sqrt{T}$, con $T = g_{mn} T^{mn}$, che è in completo accordo con lo spirito del principio di Mach. Queste due considerazioni suggeriscono di considerare un modello a *superuniverso* avente una struttura di background omogenea nello $s-t$ e isotropa e tale che il nostro Universo è rappresentato da una inomogeneità locale U del background. In tale ipotesi è possibile provare che in ogni regione di U , nella quale il campo gravitazionale è sufficientemente debole e regolare (come, ad esempio, nel sistema solare) le eq. (2), con la posizione (3), tanto più approssimano le equazioni di Einstein, quanto più le dimensioni di U sono trascurabili rispetto alle dimensioni del background e la curvatura del background in (M^4, g) è piccola. Questo risultato garantisce *a fortiori* l'accordo con i dati sperimentali disponibili anche per quanto concerne esperimenti *non* puramente gravitazionali. A tal riguardo in particolare notiamo che i parametri, che definiscono le dimensioni relative di U rispetto al background, giocano un ruolo che è per alcuni aspetti analogo a quello giocato dalla costante di accoppiamento ω nella teoria di Brans-Dicke [5].

BIBLIOGRAFIA

- [1] CATTANEO C.: Rend. Acc. Lincei, Vol. XXXII, 1962, p. 346.
- [2] CATTANEO C.: Atti di questo Convegno.
- [3] GÜRSEY F.: Ann. Phys. N. Y., Vol. 24, 1963, p. 211.
- [4] WHEELER J. A.: *Gravitation and Relativity*, W.A. Benjamin Inc., 1964, pp. 303-309.

- [5] BRANS C. and DICKE R. H.: Phys. Rev., Vol. 124, 1961, p. 925.
- [6] BARBOUR J. B. and BERTOTTI B.: Nuovo Cimento, Vol. 38B, 1977, p. 1.
- [7] GOLDONI R.: Gen. Rel. Grav., Vol. 7, 1976, p. 731; *ibid.* p. 743.
- [8] GOLDONI R.: Meccanica, Vol. XI, 1976, p. 236.
- [9] HOYLE F.: Mont. Not. Astron. R. Soc., Vol. 108, 1948, p. 372.
- [10] IVANENKO D.: Nuovo Cimento, Vol. 51A, 1967, p. 244.
- [11] IVANENKO D. e AMAN E.: Fisika (U.R.S.S.), Vol. 7, 1978, p. 86.
- [12] SCIAMA D. W.: Mont. Not. R. Astr. Soc., Vol. 113, 1953, p. 34.
- [13] AL'TSHULER B. L.: Soviet Physics JEPT, Vol. 28, 1969, p. 687.
- [14] GILMAN R. C.: Phys. Rev., Vol. 2D, 1970, p. 1400.
- [15] LYNDEN-BELL D.: Mont. Not. R. Astr. Soc., Vol. 135, 1967, p. 453.
- [16] RAINE D. F.: Mont. Not. R. Astr. Soc., Vol. 171, 1975, p. 507.
- [17] SCIAMA D. W., WAYLEN P.C. and GILMAN R.C.: Phys. Rev., vol. 187, 1969, p. 1762.
- [18] GOLDONI R.: Lett. Nuovo Cimento, vol. 23, 1978, p. 101; *ibid.* vol. 24, 1979, p. 297.
- [19] GOLDONI R.: Atti del 4° Congresso Nazionale di Meccanica Teorica e Applicata, vol. I, 1978, pp. 57-68 (Pitagora Editore).
- [20] GOLDONI R.: Istituto Matematico «L. Tonelli» Nota Interna 78-10 (1978).
- [21] CATTANEO C.: Nuovo Cimento, vol. 10, 1958, p. 318.
- [22] GOLDONI R.: Acta Physica Austriaca, Vol. 42, 1975, p. 133.
- [23] WEINBERG S.: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, 1972, p. 360.
- [24] FOCK V.: *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon Press, 1959, pp. 215-218.

RENATO GRASSINI

MODELLO CANONICO DI SPAZIO-TEMPO.

Abstract.

A unified approach to Newtonian and relativistic Physical Geometry is pursued along a methodological line which aims at giving general mathematical models of space and time and capturing the foundational value of the corresponding chronogeometrical structures.

Con lo sviluppo della teoria della relatività è invalso il punto di vista di considerare elemento primitivo della Geometria Fisica, sia nelle teorie newtoniane che in quelle relativistiche, lo spazio-tempo o universo degli eventi, di cui poi ciascuna teoria è intesa fornire un particolare modello matematico. Ne è seguita quindi l'esigenza di analizzare in dettaglio le strutture inerenti i suddetti modelli e specialmente le relazioni fra tali strutture e le assunzioni fisiche che esse esprimono.

Per tal via si è venuto costituendo un quadro di ricerche comparate sui fondamenti della Geometria Fisica newtoniana e relativistica, nel quale si distinguono due linee direttrici principali: da un lato le ricerche sugli aspetti relativistici dello spazio-tempo newtoniano [1-4], rivolte ad analizzare in questo le successive strutture geometrico-differenziali (conforme, proiettiva, affine, metrica) assunte come fondamentali in relatività; dall'altro le ricerche sugli aspetti newtoniani dello spazio-tempo relativistico [5-9], rivolte a derivare in questo strutture corrispondenti alle nozioni newtoniane di spazio e tempo ed aventi il significato operativo di osservabili fisiche.

Recentemente si è venuta poi configurando una terza linea di ricerca, rivolta alla descrizione formale generale dello spazio e del tempo ed al recupero del valore fondazionale delle corrispondenti strutture cronogeometriche. Precisamente, nell'ambito di tale linea di ricerca, C. Harrison ha introdotto [10] nell'universo degli eventi strutture cronogeometriche globali (*sistema spazio-temporale, classe canonica di sistemi spazio-temporali*) che risultano un comune fondamento delle teorie piatte, newtoniane e relativistiche, dello spazio-tempo. D'altra parte, nel-

l'ambito della medesima linea di ricerca, ho introdotto [11-13] in un modello generale d'universo, costituito da una 4-varietà a connessione affine, strutture cronogeometriche locali (1-forma temporale, metrica spaziale, connessione spaziale) che risultano comuni anche alle teorie non piate dello spazio-tempo.

In un successivo lavoro [14], sulla base di quest'ultima impostazione metodologica, ho elaborato una generalizzazione della teoria formale di C. Harrison che, sintetizzando i risultati cronogeometrici dei vari lavori precedentemente citati, realizza un approccio fondazionale unificato a tutte le teorie, newtoniane e relativistiche, dello spazio-tempo. Momento centrale di tale approccio è l'individuazione di un *modello canonico di spazio-tempo*, che evidenzia il completo bagaglio di strutture cronogeometriche (e corrispondenti assunzioni fisiche) costituenti il comune fondamento delle suddette teorie.

Il piano del lavoro è il seguente:

(i) In una 4-varietà M , assunta come modello matematico fondamentale d'universo, si ridefiniscono le strutture cronogeometriche di C. Harrison in corrispondenza a nozioni locali di spazio e tempo (e a quelle correlate di misura ed evoluzione) intese nella molteplicità delle relative determinazioni fisiche:

DEF. 1. S è un *sistema spazio-temporale* in M se è

$$S = (\Pi, g, \nabla),$$

denotando (Π, g, ∇) un insieme costituito da una struttura quasi-prodotto Π , una metrica lorentziana g ed una connessione affine ∇ in M verificanti i seguenti assiomi:

(S1) Π decompone il fibrato tangente TM nella somma di Whitney

$$TM = \sigma \oplus \theta,$$

dove σ denota una distribuzione 3-dimensionale e θ una distribuzione orientata 1-dimensionale in M .

(S2) g si decompone nella somma (1)

$$g = g_\sigma \circ \mathcal{P}_\sigma + g_\theta \circ \mathcal{P}_\theta,$$

dove g_σ denota una metrica fibrata definita positiva in σ e g_θ una metrica fibrata definita negativa in θ .

(S3) ∇ si decompone nella somma

$$\nabla = \nabla_\sigma \circ \mathcal{P}_\sigma + \nabla_\theta \circ \mathcal{P}_\theta,$$

(1) Con $\mathcal{P}_\sigma : TM \rightarrow \sigma$, $\mathcal{P}_\theta : TM \rightarrow \theta$ si indicheranno le proiezioni su σ e θ definite da Π in TM .

dove ∇_σ denota una connessione metrica in σ e ∇_θ una connessione metrica in θ .

DEF. 2. C è una classe canonica di sistemi spazio-temporali in M se è

$$C = \{S, S', \dots\},$$

denotando $\{S, S', \dots\}$ un insieme costituito da sistemi spazio-temporali in M verificanti i seguenti assiomi (2):

(C1) Per ogni $S, S' \in C$, ed in ciascun punto di M , vale la disequazione

$$g(\gamma, \gamma') < 0.$$

(C2) Per ogni $S, S' \in C$, ed in ciascun punto di M , valgono le implicazioni

$$\theta = \theta' \Rightarrow \tau = \tau'$$

$$\sigma = \sigma' \Rightarrow h = h'$$

$$\sigma = \sigma' \Rightarrow \nabla_\sigma = \nabla_{\sigma'}$$

(ii) L'introduzione in M di una classe canonica C di sistemi spazio-temporali e di una connessione affine D (necessaria ai fini della formulazione differenziale generalmente covariante delle teorie), collegate da naturali condizioni di compatibilità, conduce al preannunciato modello canonico di spazio-tempo:

DEF. 3. K è un modello canonico di spazio-tempo se è

$$K = (M, C, D)$$

denotando (M, C, D) un insieme costituito da una 4-varietà M , una classe canonica C in M ed una connessione affine D in M verificanti i seguenti assiomi:

(K1) Per ogni $S \in C$ valgono le relazioni

$$\nabla_\sigma = \mathcal{P}_\sigma(D), \nabla_\theta = \mathcal{P}_\theta(D).$$

(K2) Le classi T_C ed S_C (3) sono D -invarianti.

(iii) Condizioni di invarianza imposte all'interno di C da un principio di isotropia ottica e dal suo limite newtoniano conducono alle specializzazioni einsteiniana e newtoniana del modello canonico:

(2) In corrispondenza a ciascun sistema spazio-temporale S , γ denoterà il generatore globale orientato normalizzato dalla condizione $g(\gamma, \gamma) = -1$; τ ed h denoteranno la 1-forma e la metrica fibrata date da $\tau = -g(\gamma)$, $h = g_\sigma$.

(3) T_C (S_C) denota la classe dei vettori del genere tempo (spazio), costituita dai vettori non nulli appartenenti alle varie distribuzioni θ (σ) che figurano in C .

DEF. 4. E è un *modello einsteiniano di spazio-tempo* se è

$$E = (M, C, D),$$

denotando (M, C, D) un modello canonico di spazio-tempo verificante il seguente assioma:

(E) C è una classe canonica massimale di sistemi spazio-temporali in M aventi la medesima metrica spazio-temporale g .

DEF. 5. N è un *modello newtoniano di spazio-tempo* se è

$$N = (M, C, D),$$

denotando (M, C, D) un modello canonico di spazio-tempo verificante il seguente assioma:

(N) C è una classe canonica massimale di sistemi spazio-temporali in M aventi la medesima 1-forma temporale τ e la medesima metrica spaziale h .

Il modello E viene a identificarsi (nel caso generale) con lo spazio-tempo di Einstein-Cartan

$$E = (M, g, D)$$

$$Dg = 0,$$

di cui poi il modello N , che viene a identificarsi con lo spazio-tempo di Newton-Cartan

$$N = (M, \tau, h, D)$$

$$D\tau = 0$$

$$Dh = 0,$$

fornisce l'analogo newtoniano.

BIBLIOGRAFIA

- [1] TRAUTMAN A., *Comp. Rend. Paris*, 257, 617 (1963).
- [2] TRAUTMAN A., in *Perspectives on Geometry and Relativity*, Bloomington (1966).
- [3] HAVAS P., *Rev. Mod. Phys.*, 36, 938 (1964).
- [4] KUNZLE H. P., *Gen. Rel. Grav.*, 7, 445 (1976).
- [5] CATTANEO C., *Il Nuovo Cimento*, 10, 318 (1958).
- [6] CATTANEO C., *Ann. di Mat.*, 48, 361 (1959).
- [7] CATTANEO C., *Comp. Rend. Paris*, 256, 3974 (1963).
- [8] EASTBOOK F., WAHLQUIST H., *J. Math. Phys.*, 5, 1629 (1964).
- [9] MOLLER C., *The Theory of Relativity*, Oxford (1972).
- [10] HARRISON C., in *Space, Time and Geometry*, P. Suppes (ed.), Reidel (1973).
- [11] GRASSINI R., *Acc. Lincei, Rend. Sci.*, 56, 720 (1974).

- [12] GRASSINI R., Acc. Sci. Nap., 41, 209 (1974).
- [13] GRASSINI R., Boll. UMI, 11, 507 (1975).
- [14] GRASSINI R., Sulla struttura dello spazio-tempo, Ann. di Mat..

S. LESCHIUTTA, E. DETOMA

ESPERIMENTI GRAVITAZIONALI CON OROLOGI.

Sommario

L'esistenza di orologi atomici e di metodi di confronto di elevata precisione tra orologi distanti od in movimento ha reso possibili alcune delle numerose esperienze relativistiche che erano state proposte sin dall'inizio del secolo. La nota descrive i cinque esperimenti effettuati tra il 1971 ed il 1977, il secondo dei quali sviluppatosi tra Torino e Plateau Rosa, mettendo in evidenza le difficoltà sperimentali ed i risultati conseguiti. Si dà cenno infine agli esperimenti proposti e si indicano le prime applicazioni tecnologiche (sistemi di navigazione e costruzione di scale di tempo) delle correzioni relativistiche.

1. Premessa

Gli sviluppi che si sono recentemente osservati nella metrologia del tempo hanno reso possibili alcune delle numerose verifiche relativistiche che erano state proposte sin dall'inizio del secolo e che coinvolgevano l'uso di orologi. Ma poiché tutte queste esperienze comportano di necessità il confronto tra orologi distanti o in movimento, si è dovuto attendere lo sviluppo parallelo sia degli orologi atomici sia delle tecniche di confronto a distanza tra scale di tempo locali.

Può essere utile considerare in prospettiva storica questi due sviluppi rappresentati in forma qualitativa nelle figure 1 e 2, rinviando per una giustificazione dei grafici alle fonti citate [1, 2, 3, 4]. Per quanto riguarda la figura 1, si presti attenzione al fatto che la corrispondenza ivi indicata tra lo scarto di frequenza relativo e la marcia giornaliera è valida per i campioni atomici, di tipo primario [5]; per gli altri orologi di tipo secondario o affetti da fenomeni di deriva, la corrispondenza può non esistere. Il grafico resta comunque indicativo delle migliori prestazioni disponibili nei vari momenti.

Nella stessa figura 1 sono riportati i valori previsti per una tipica esperienza di relatività ristretta (ritardo tra un orologio che circumnavighi una volta la terra, sopra l'equatore, a 10 km di quota, con una velocità di 1000 km/h, in direzione

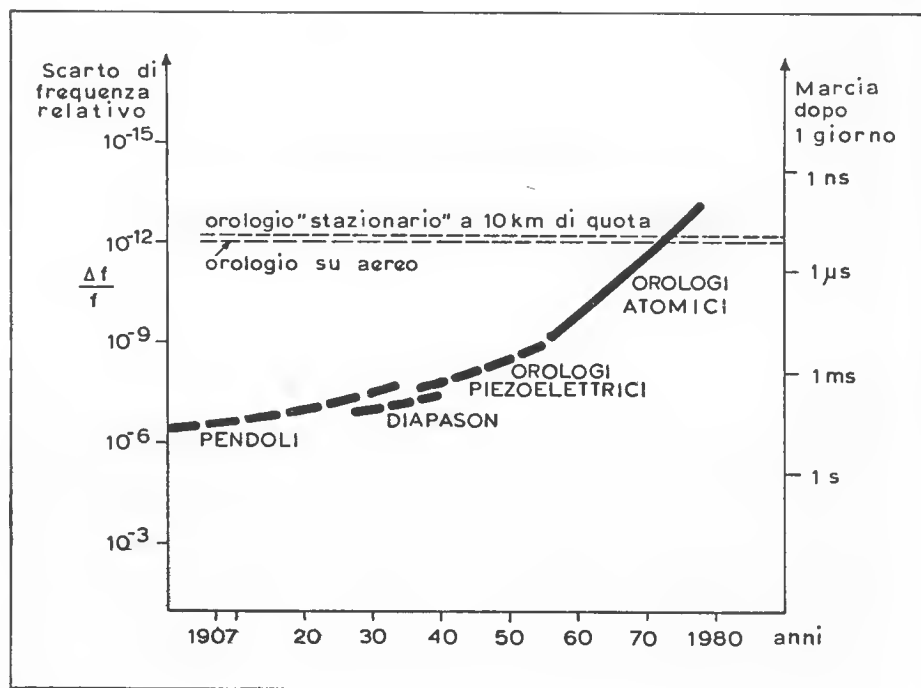


Figura 1

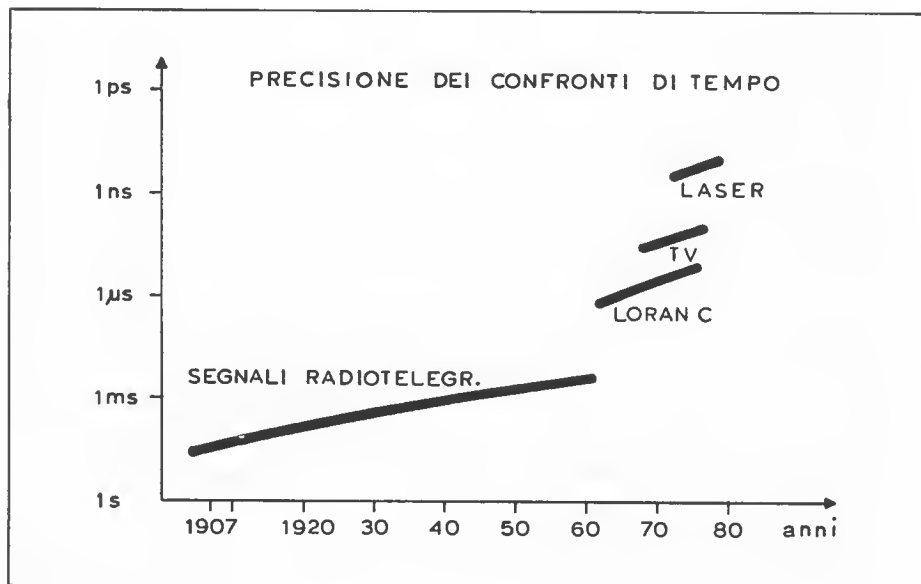


Figura 2

Est, rispetto a un orologio stazionario) e per una esperienza di spostamento gravitazionale (scarto maturato, dopo un giorno, tra due orologi stazionari, posti ad una differenza di quota di 10 km). Dal confronto dei grafici delle figg. 1 e 2 risulta che solo dopo il 1970 si sono resi disponibili orologi con precisioni o stabilità sufficienti e **soprattutto** mezzi di confronto per misurare con adeguata precisione l'effetto considerato.

2. Gli orologi atomici.

Gli orologi atomici, pur essendo gli oggetti più raffinati esistenti in laboratori di ricerca e oggi prodotti su scala industriale, sono tuttora ben lontani dall'orologio ideale definito in ogni teoria relativistica, a causa di rilevanti difficoltà fisiche, legate alla scelta della transizione, e tecnologiche. Gli orologi atomici sin qui proposti e utilizzati [6] sfruttano una transizione iperfina tale che:

- avvenga tra due livelli facilmente identificabili e per i quali sia relativamente agevole ottenere una inversione di popolazione;
- sia ridotta la sensibilità a campi magnetici o elettrici e ad effetti di velocità e accelerazione.

Inoltre l'apparato sperimentale dovrà essere tale da consentire tutti gli esperimenti necessari per determinare le eventuali correzioni note (effetti Doppler, Zeeman, Stark, ecc.) e ridurre le interazioni con gli atomi che effettuano la transizione osservata.

Un orologio atomico reale, oltre che dal dispositivo nel quale si osserva la transizione, è costituito da un elevato numero di circuiti radioelettrici ed elettronici, necessari sia per il funzionamento del dispositivo «fisico», sia per l'orologio propriamente detto. L'influenza di fattori ambientali (temperatura, umidità, pressione, ecc.) sui circuiti elettronici è rilevante in relazione alla precisione

Tabella I

	Stabilità				Volume dm ³	Massa kg	Pot. W	Esem- plari co- struiti per va- rie appl.
	1 s	1 h	1 d	1 a yr				
maser idrogeno	$5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-15}$	$5 \cdot 10^{-15}$	10^{-12}	100	80	50	50
fascio cesio	$5 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-13}$	10^{-13}	$3 \cdot 10^{-13}$	30	40	20	5000

che ci si propone di ottenere e tale da mascherare molte volte l'influenza dei fattori fisici che agiscono direttamente sulla transizione.

Gli orologi sin qui adoperati in esperienze di verifica di teorie relativistiche, sono stati il maser all'idrogeno e il campione con fascio di cesio. Per una discussione delle caratteristiche di questi campioni atomici si rimanda alle fonti citate; alcune caratteristiche sono comunque riportate nella tabella I.

3. Esperimenti relativistici con orologi atomici.

La letteratura sui vari effetti relativistici determinabili con orologi è ben nota e vasta; si segnalano solamente alcuni lavori generali [7] ed un recente articolo di rassegna [8]. I riferimenti dei singoli esperimenti verranno citati più oltre.

La tabella II riporta i cinque esperimenti svolti tra il 1971 ed il 1977; di altri esperimenti in corso o proposti si dirà più oltre.

Tabella II

	<i>orologi in movimento</i>	<i>orologi stazionari o quasi stazionari</i>
1972	USNO Hafele - Keating 4 orologi al cesio attorno al mondo	
1975		IEN-LCG/CNR 1 orologio al cesio Torino-Plateau Rosa
1975-76		Univ. Maryland - USNO C. Alley 3 orologi al cesio
1976	Smithsonian Astrophys. Obs. - R.F.C. Vessot maser su razzo	
1977		Osserv. Astron. - Tokyo Iijima e Fujiwara 1 orologio al cesio Misuzava - Norikura

3.1. Esperimento Hafele - Keating.

L'esperimento si è svolto nel 1971 [9], usando due gruppi di 4 orologi che hanno circumnavigato il globo nei due versi, con inizio e fine di ogni viaggio in Washington, ove gli orologi sono stati ogni volta confrontati con la scala di tempo dello U. S. Naval Observatory (USNO). La scala di tempo dell'USNO è basata [10] su circa 15 orologi al cesio, scelti tra alcune decine di esemplari e presenta una notevole stabilità [11]. I viaggi, effettuati con voli di linea, hanno avuto la durata di 65,4 ore verso Est e 80,3 ore verso Ovest.

La relazione usata è stata del tipo

$$(1) \quad \frac{T_a - T_o}{T_o} \simeq \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \left[\frac{g(t) h(t)}{c^2} - \frac{2 \omega R v_E(t) \cos \vartheta(t) + v(t)^2}{2c^2} \right] dt$$

dove T_a lettura dell'orologio sull'aereo

T_o lettura dell'orologio stazionario, riferita al geoide

v_E componente, nella direzione di Est, della velocità v dell'aereo

ω ed R velocità angolare e raggio della terra

ϑ latitudine

I componenti gravitazionale e di velocità nella (1), hanno importanza diversa, in funzione della quota, velocità e direzione dell'aereo, come risulta dalla figura 3 che riporta l'andamento della (1), nel caso semplificato che la rotta segua l'equatore.

Nell'esperimento considerato, la (1) è stata calcolata considerando il tragitto come una spezzata, i cui caposaldi sono stati forniti dai piloti degli aerei.

Il risultato del confronto è riportato nella tabella III.

Tabella III

<i>circumnavigazione</i>	<i>valore predetto</i>	<i>valore misurato</i>
verso Est	-40 ± 23 ns	-59 ± 10 ns
verso Ovest	$+275 \pm 21$ ns	$+273 \pm 7$ ns

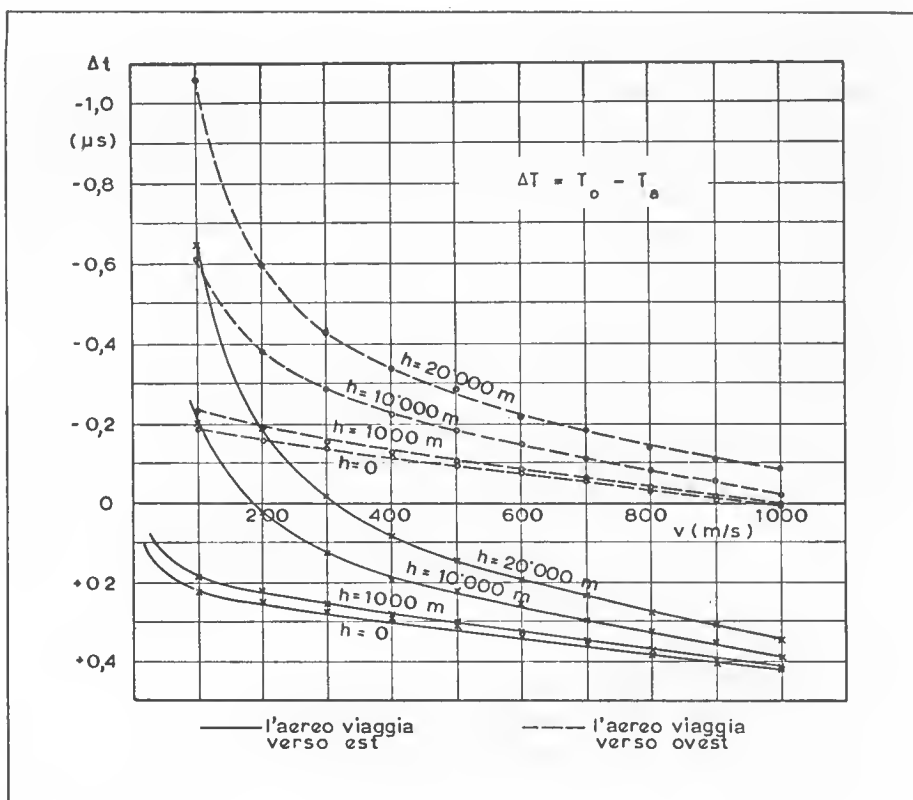


Figura 3

3.2. Esperimento Torino - Plateau Rosa.

L'esperimento si è svolto dall'aprile al giugno del 1975, in collaborazione tra l'Istituto Elettrotecnico Nazionale (IEN) ed il Laboratorio di Cosmogeofisica del CNR, entrambi in Torino.

Durante l'esperimento [13], un orologio al cesio dell'IEN è stato portato nella capanna del Plateau Rosa (3500 m) e per tutta la durata dell'esperienza è stato confrontato con un analogo orologio, sistemato nella sede dell'IEN (250 m). Per il confronto si è usato un metodo che sfrutta i segnali di sincronismo televisivi dei normali programmi della RAI e che consente di ottenere una risoluzione dell'ordine di 30 ns (1 sigma) con una misura della durata di una decina di secondi. La precisione del sistema di misura è anch'essa valutabile in poche decine di nanosecondi.

I due orologi sono stati inoltre confrontati direttamente, all'inizio ed alla fine dell'esperimento. La marcia giornaliera dell'orologio in quota ($gh/c^2 \simeq 30 \text{ ns/d}$) rispetto a quello in Torino e dovuta alla differenza di potenziale gravitazionale

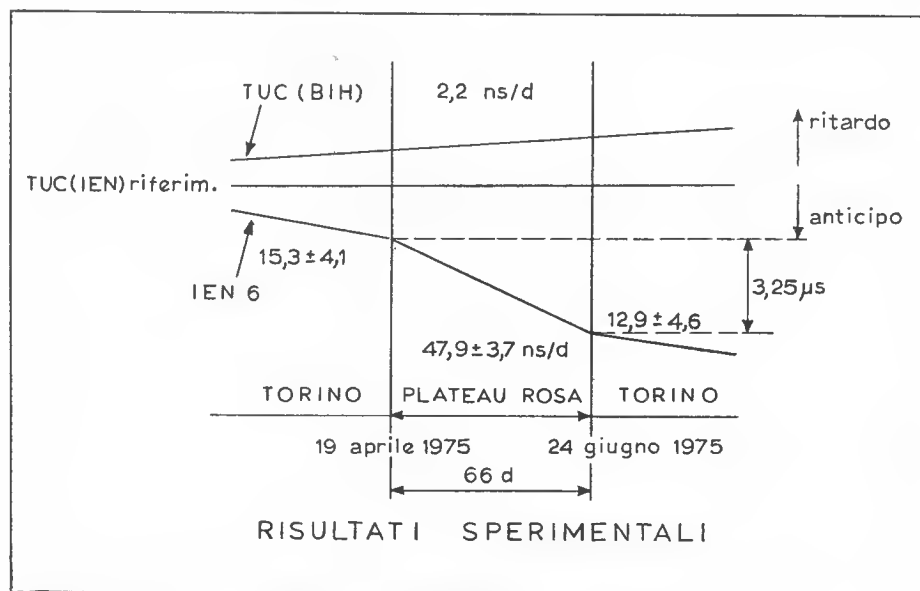


Figura 4

Tabella IV. Esperimento IEN - Plateau Rosa.

<i>marcia prevista</i>	<i>marce osservate</i>	
$\frac{g \Delta h}{c^2}$	confronto giornaliero televisivo	differenze di lettura tra inizio e fine
30,6 ns/d	$33,8 \pm 6,8$ ns/d	$36,5 \pm 5,8$ ns/d

è dello stesso ordine della risoluzione e della precisione del sistema di misura, ma ovviamente lo scarto tra i due orologi si somma nel tempo.

La figura 4 riporta i risultati bruti dell'esperienza, non corretti della marcia dell'orologio rimasto a Torino; i risultati finali ottenuti con le misure giornaliere televisive e con il confronto diretto sono riportati nella tabella IV.

3.3. Esperimento dell'Università del Maryland - USNO.

Tra il settembre 1975 ed il febbraio 1976 si è svolto un esperimento di spostamento gravitazionale, ben condotto, e sviluppato con dovizia di mezzi ed interessanti risultati [14]. Un gruppo di tre orologi al cesio, racchiusi in una camera con pressione e temperatura regolate e schermata elettricamente e magneticamente,

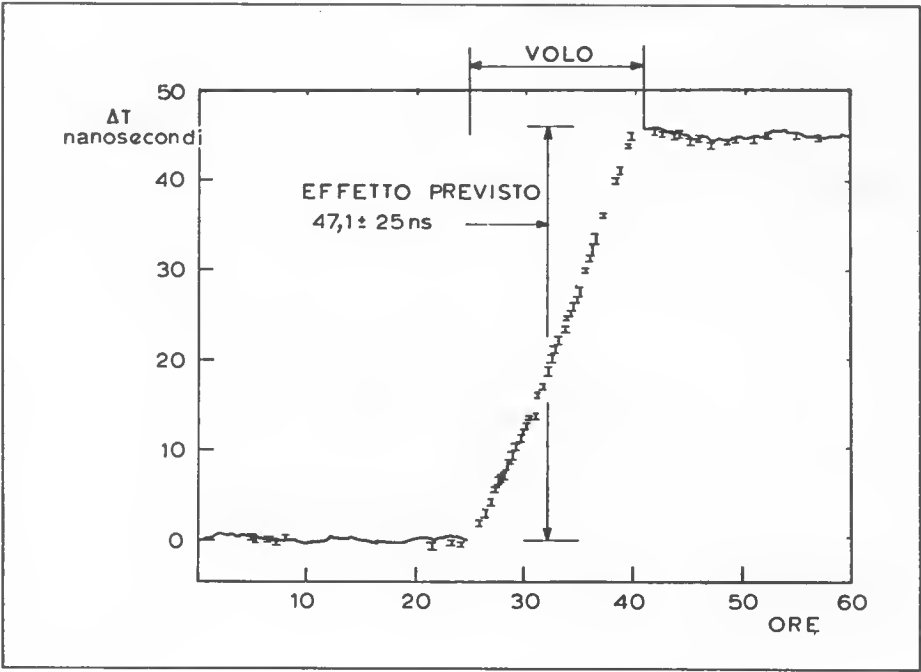


Figura 5

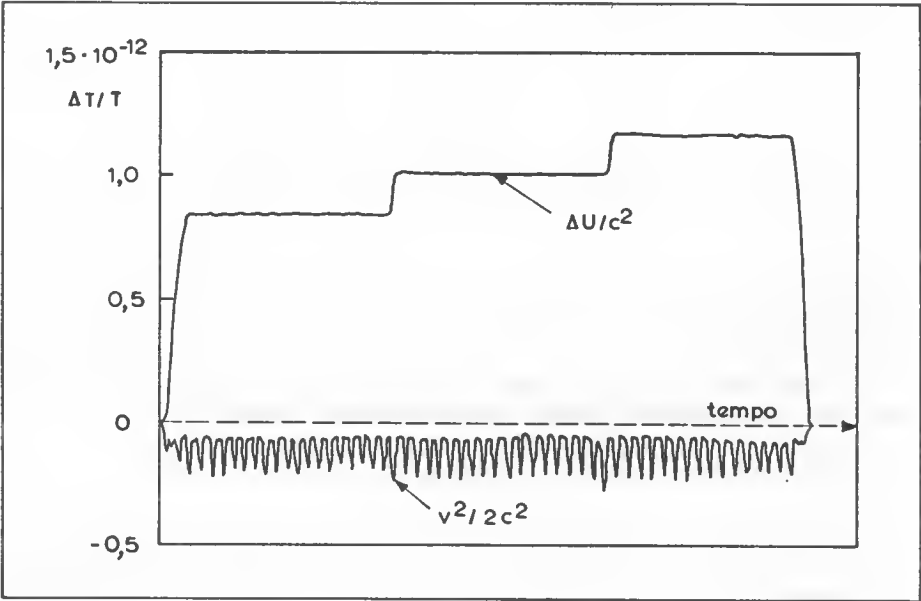


Figura 6

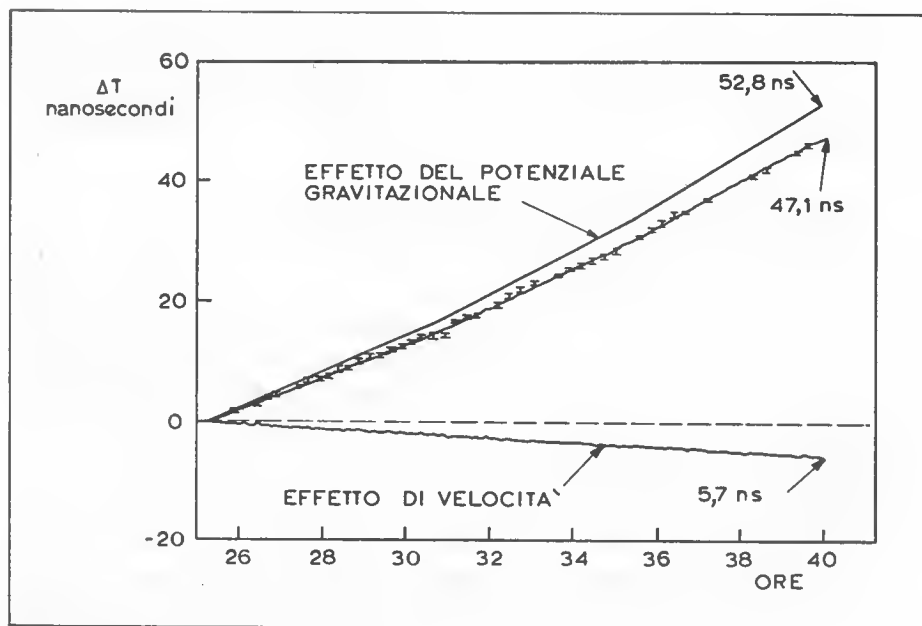


Figura 7

è stato trasportato per 5 voli della durata complessiva di 75 ore, ad una quota attorno a 10 km. L'aereo volava in cerchio ed a bassa velocità (circa 430 km/h) per ridurre il termine relativistico dovuto alla velocità. Questo termine fu comunemente determinato con continuità mediante un radar calibrato con un teodolite.

La lettura dei 3 orologi di bordo veniva riferita, circa ogni 200 s, a quella di un analogo gruppo di orologi a terra, mediante impulsi laser, della durata di circa 100 ps inviati da terra, riflessi da retroriflettori disposti sull'aereo e ricevuti a bordo, mentre la stazione a terra determinava l'istante di partenza e di ritorno del proprio impulso laser.

L'aereo confrontava l'istante di ricezione dell'impulso laser nei confronti dei propri orologi e riceveva, tramite telemetria da terra, il tempo di propagazione di ogni singolo impulso, determinato dal tempo di andata e ritorno. La risoluzione del metodo di confronto è stata stimata in 0,3 ns; lo spostamento gravitazionale tra i due gruppi, dopo 15 ore di volo a 10 km, risulta di circa 50 ns.

Nella figura 5 si riporta il confronto di tempo tra la media dei tre orologi a bordo e la media dei tre orologi stazionari, prima, durante, e dopo un tipico volo; le linee continue rappresentano una misura diretta, i punti con gli errori sperimentali, le misure laser. La figura 6 riporta le due correzioni di frequenza, calcolate partendo dai dati del radar di inseguimento; i gradini nel termine gravitazionale indicano variazioni di quota, mentre le variazioni del termine di velocità

rappresentano l'effetto dei venti in quota incontrati dall'aereo nella sua traiettoria circolare. La figura 7 riporta i risultati sperimentali assieme alla previsione teorica dei due effetti. Le figure 5, 6, 7, sono state riprese da Alley [14], ove si ricava che, considerando tutti i 15 casi (5 voli con 3 orologi), la verifica è stata ottenuta entro l'1,3%.

3.4. Esperimento dell'Osservatorio Astronomico di Tokyo.

L'esperimento conclusivo si è svolto nel giugno 1977 [15] dopo esperienze preliminari compiute nei due anni precedenti.

Un orologio atomico al cesio è stato trasportato dall'Osservatorio di Misuzava (58 m) a quello di Norikura (2876 m) per due periodi di una settimana. Cure particolari sono state dedicate al calcolo delle correzioni relativistiche durante il viaggio ed alle correzioni degli effetti di umidità, pressione, temperatura e campo magnetico, appositamente determinati per l'orologio mobile [16].

La marcia dell'orologio in quota non è stata misurata durante l'esperimento le differenze di lettura tra gli orologi interessati sono state determinate prima e dopo ogni viaggio mediante un fasometro; i relativi risultati sono riportati in figura 8; l'accordo tra teoria ed esperimento è risultato entro il 6%.

Nella tabella V sono confrontati gli esperimenti di cui ai punti 3.2, 3.3 e 3.4, nei quali lo spostamento gravitazionale è stato l'unico od il prevalente effetto osservato.

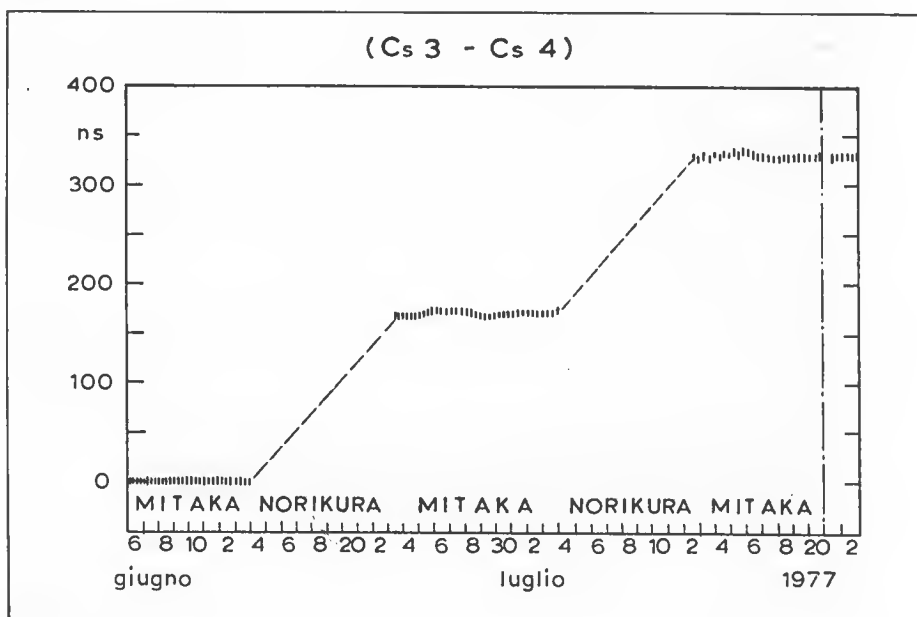


Tabella V

	<i>IEN-LCG/CNR</i> <i>aprile-giugno '75</i>	<i>Univ. Maryland</i> <i>USNO</i> <i>5 voli</i> <i>tra sett. '75</i> <i>e genn. '76</i>	<i>Oss. Astron. Tokyo</i> <i>giugno-luglio '77</i>	
Durata	66 d	5 voli di 15 ore	2 periodi di una settimana	
Differenza quota	3250 m	10000	2820 m	
Orologi	1	3 camera termostatica, barometrica, schermata	1 camera termostatica, con pressione ed umidità controllate	
Metodi di confronto con imprecisioni relative	durante l'esperienza	metodo televisivo 1 valore al giorno 30 ns	laser e retrorifl. ogni 204 s 0,3 ns	—
	inizio e fine in laborat.	intervallometro 0,1 ns	intervallometro 0,1 ns	fasometro 2 ns
$\frac{\text{effetto misurato}}{\text{effetto previsto}}$	$1,10 \pm 0,2$ confronto televis.	$1,19 \pm 0,2$ confronto inizio-fine	$0,987 \pm 0,016$	$0,94 \pm 0,05$

3.5. Esperimento dell'Osservatorio Astrofisico Smithsonian di Cambridge.

L'esperimento è stato avviato nel 1966 [17] dallo Smithsonian Astrophysical Observatory (SAO), con sostegno della NASA, ed è stato sviluppato dal Dr. R. F. C. Vessot su un arco di oltre dieci anni. L'esperimento è ben noto, è ampiamente descritto [18] ed ha comportato la risoluzione di numerosi ed eleganti problemi sia scientifici sia tecnici, in particolare con la costruzione di un maser all'idrogeno in grado di superare un lancio di tipo spaziale. L'esperimento ha avuto luogo il 18 giugno 1976 ed il razzo ha seguito una traiettoria di tipo balistico, la cui traccia è riportata nella figura 9, con apogeo a circa 10000 km, cioè a circa 2,5 raggi terrestri dal centro della terra; a questa distanza il campo gravitazionale è circa il 16% del campo sulla superficie della terra.

Durante il volo, durato circa 7000 s, la frequenza dell'orologio a bordo è stata misurata nei confronti di un analogo maser posto alle Bermude, mediante uno

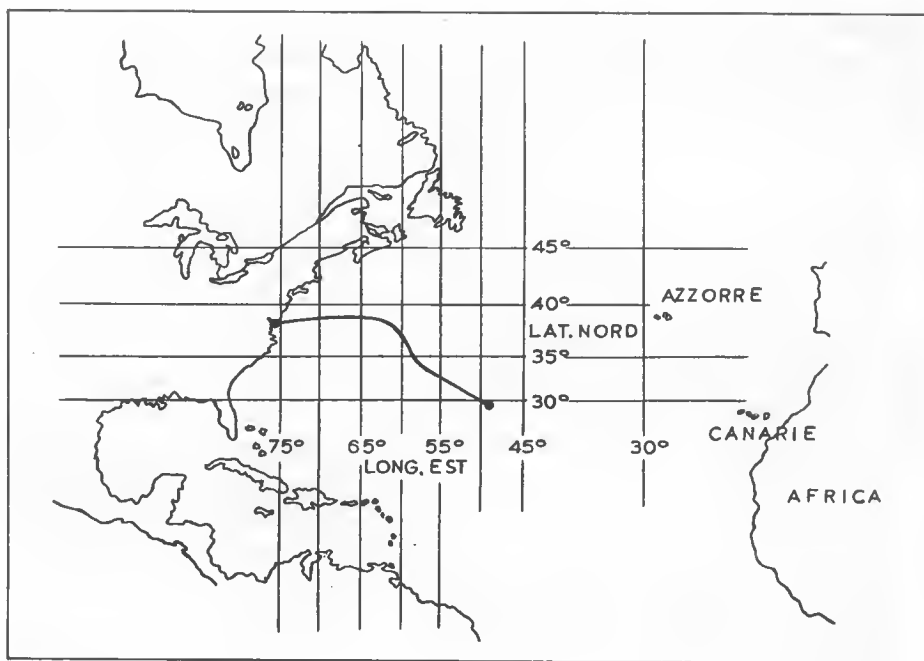


Figura 9

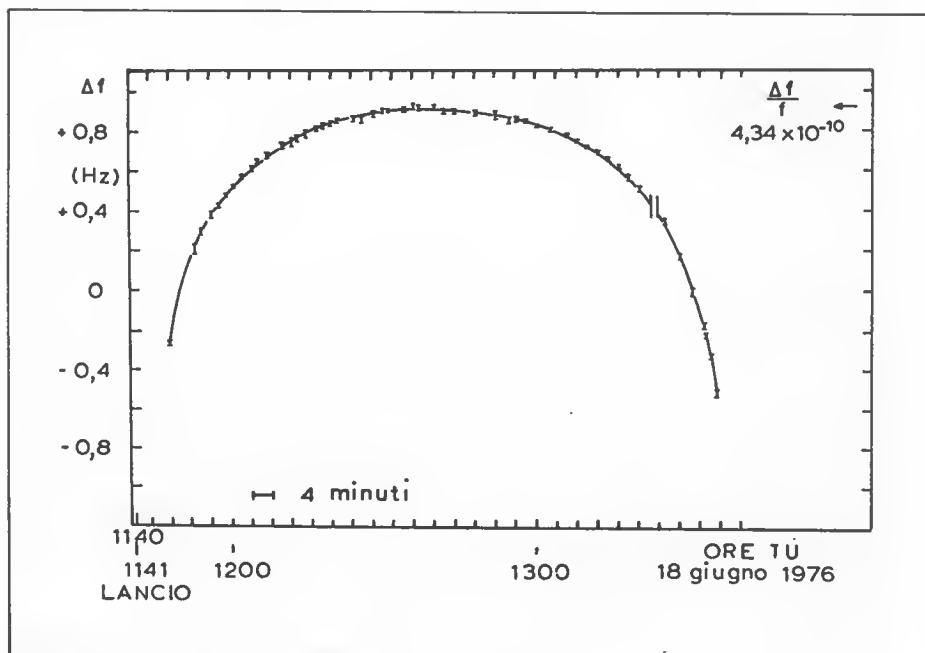


Figura 10

speciale sistema telemetrico che provvedeva rimuovere l'effetto Doppler di primo ordine, dovuto alla variazione della lunghezza del tragitto radioelettrico.

La determinazione degli effetti relativistici è risultata particolarmente complessa, per il sovrapporsi di un effetto di dilatazione del tempo (Doppler del secondo ordine) e di uno gravitazionale sulla marcia dell'orologio e per gli effetti relativistici sulle telemetrie. Per una discussione sui metodi di misura e sui risultati, oltre ai già citati articoli [17 e 18] si veda un'altra nota del Vessot [19].

La variazione di frequenza rispetto all'orologio stazionario, è negativa con la sonda vicino alla terra ed è positiva quando, verso l'apogeo, prevalgono gli effetti gravitazionali. La massima variazione di frequenza relativa prevista dalla teoria di $5 \cdot 10^{-10}$ (nell'esperienza di Plateau Rosa il corrispondente valore è di $3,54 \cdot 10^{-13}$) e poiché la stabilità dei maser adoperati è alquanto migliore di $1 \cdot 10^{-14}$ per tempi di integrazione di alcune ore e gli errori del sistema di misura sono attorno a $2 \cdot 10^{-14}$, è stato possibile determinare gli effetti relativistici con una incertezza attorno a $2 \cdot 10^{-4}$.

La figura 10 riporta l'andamento dei risultati sperimentali.

4. Uso delle correzioni relativistiche.

4.1. Costruzione della scala di tempo TAI (*Tempo Atomico Internazionale*).

La costruzione delle scale di tempo internazionale TAI (*Tempo Atomico Internazionale*) e UTC (*Tempo Universale Coordinato*) sono affidate al Bureau International de l'Heure (BIH), che opera sotto la sorveglianza dell'«International Council of Scientific Unions». Nel 1970, il Comitato Consultativo per la Definizione del Secondo (CCDS, uno degli organi del Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)), ha [20] fornito al BIH le istruzioni per la costruzione di TAI (e quindi di UTC, che attualmente ha la stessa unità di scala di TAI, il secondo SI, ma ne differisce per un numero intero di secondi) e precisamente: «La durée de l'intervalle unitaire de l'échelle de Temps Atomique International est déterminée par le Bureau International de l'Heure (BIH) de façon qu'elle soit en accord étroit avec la durée de la seconde du Système International d'Unités rapportée à un point fixe de la Terre au niveau de la mer.». Pertanto dal 1970 le scale di tempo usate nella scienza e nella tecnica tengono conto di una correzione basata sull'altezza sul geoide degli orologi che contribuiscono alla loro formazione; in particolare la correzione relativistica per gli orologi del NBS, posti a 1634 metri sul geoide, è di $1,8 \cdot 10^{-13}$.

4.2. Costruzione di un sistema coordinato di orologi terrestri.

Si stanno diffondendo i sistemi tecnici che richiedono, per il loro funzionamento, una «sincronizzazione» dell'ordine o migliore di un microsecondo (sistemi di

navigazione Loran-C ed Omega o tramite satelliti, trasmissioni numeriche di dati, proposti sistemi di anticollisione, misura di posizione di sonde spaziali) basati tutti sull'uso di orologi atomici. Alcuni di questi sistemi possono funzionare con una «sincronizzazione» interna al sistema, ma per tutti e per talune applicazioni scientifiche, sarebbe opportuno il potersi riferire ad una rete di orologi, tra loro «coordinati». Due sono le ipotesi fondamentali attualmente in discussione [21]:

a) un sistema di orologi, la cui frequenza e le cui letture siano individualmente corrette per tenere conto di spostamento gravitazionale, velocità rispetto al suolo e velocità della terra (anche per gli orologi «stazionari»);

b) un sistema di orologi con una discontinuità di sincronizzazione lungo un meridiano.

Il sistema a) presenta le seguenti caratteristiche:

— la sincronizzazione con trasporto di orologi o la trasmissione di segnali danno risultati coincidenti, ma oltre agli orologi, è necessario correggere anche il tempo di propagazione, per tener conto della rotazione della terra;

— la sincronizzazione così ottenuta non dipende dal percorso e gode della transitività (se A e B sono sincronizzati con C . . .);

— ognuno degli orologi che appartengono alla rete fornisce direttamente la coordinata temporale.

Il sistema b) presenta le seguenti caratteristiche:

— le sincronizzazioni sia con trasporto di orologio sia con la trasmissione di segnali radio non devono essere corrette dei termini dovuti alla rotazione della terra;

— i trasporti di orologio devono essere corretti dei termini gravitazionale e di velocità (rispetto alla terra);

— si ha una rete di orologi coordinati mutualmente sincronizzati, purché non si attraversi il meridiano o la linea tra i poli ove viene «accumulata» la discontinuità;

— attraversando questo meridiano si deve introdurre una discontinuità di

$$\frac{2\pi\omega r^2 \cos^2 \varphi}{c^2} = 207,4 \cos^2 \varphi \quad \text{nanosecondi}$$

con ω ed r velocità angolare e raggio equatoriale della terra e φ latitudine del punto ove si taglia tale meridiano;

— la sincronizzazione dipende pertanto dal percorso e non è transitiva;

— la lettura del generico orologio non fornisce la coordinata temporale.

Sempre in [21] sono discussi da un punto di vista relativistico, i metodi di sincronizzazione possibili (trasporto lento per paralleli, trasporto per meridiani,

effetti del campo gravitazionale del sole e della luna, anomalie gravitazionali, massa dell'atmosfera, ecc.).

4.3. Esempio di correzione relativistica su un sistema di navigazione tramite satelliti.

E' in corso di realizzazione, da parte degli Stati Uniti, un sistema di navigazione, basato sull'uso di orologi atomici a bordo di una costellazione di 24 satelliti (Global Positioning System); il sistema entrerà in servizio nella prossima decade, ma è già parzialmente attivo ed usato. I primi satelliti della fase sperimentale, lanciati a partire dal 1967, avevano a bordo orologi a quarzo, nel '74 sono stati lanciati dei campioni atomici secondari, nel '77 è stato messo in orbita il primo orologio con fascio di cesio e per il 1981 è previsto il lancio di un maser all'idrogeno.

I satelliti sono su un'orbita circolare, ad un'altezza di circa 20000 km (circa 4 raggi terrestri dal centro della terra). Nel caso del lancio del 1977, poiché l'orologio al cesio del satellite deve, per l'utente terrestre, avere una «frequenza» eguale per quanto possibile a quella degli altri satelliti appartenenti al sistema di navigazione, prima è stato misurato [22], figura 11, lo spostamento relativistico, in ottimo accordo con le previsioni teoriche (effetto misurato/effetto previsto = 0,994), ed in un secondo momento è stata apportata la relativa correzione,

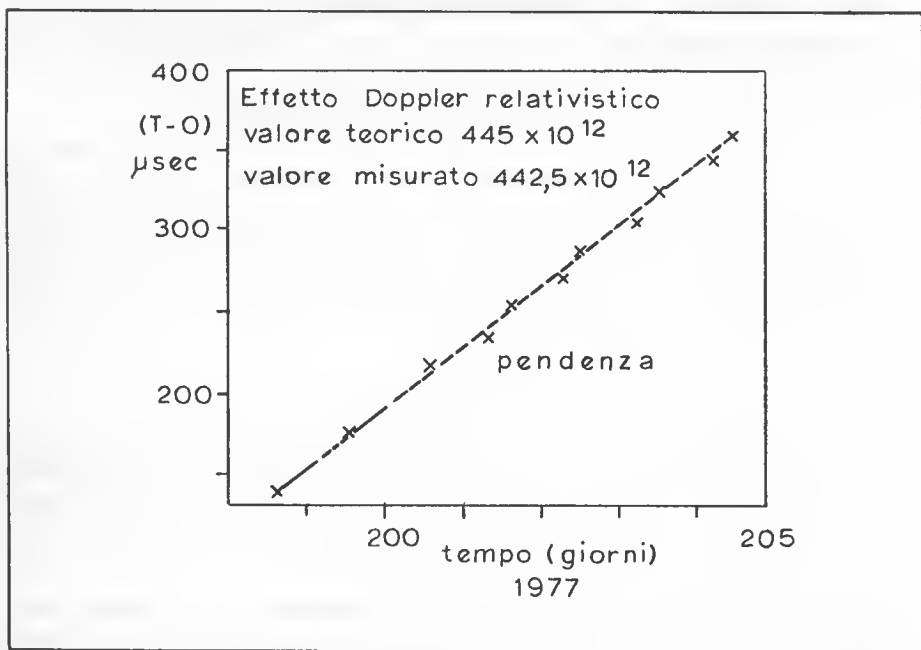


Figura 11

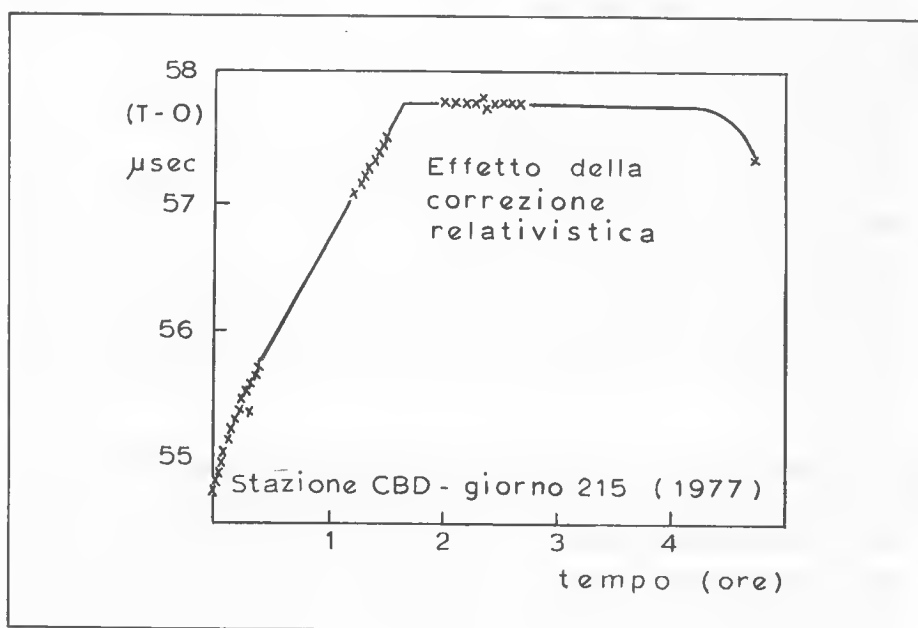


Figura 12

figura 12. Nelle figure 11 e 12 lo scarto di tempo in ordinate ($T-O$) significa Teoria-Osservazione; nella figura 11, la pendenza teorica e misurata sono espresse in unità di 10^{-12} .

L'uso previsto di un maser su satellite orbitante consentirà un confronto tra il comportamento di due orologi atomici di tipo diverso; infatti nel maser si osservano degli atomi immagazzinati in una cavità, nella quale hanno velocità con direzioni casuali, nel campione con fascio si ha un getto direzionale, di atomi veloci, in libera caduta, senza collisioni.

Si potranno forse così determinare delle differenze di comportamento che non è stato possibile rilevare in laboratorio [23].

5. Altre proposte di esperimenti e problemi aperti.

Per gli studi sulla gravità, l'uso di orologi può andare ben oltre le verifiche sperimentali dello scorso quinquennio, nel senso che l'orologio, oltre a divenire uno strumento per misurare direttamente la gravità, potrà costituire uno degli elementi di prova [24] delle nuove teorie gravitazionali.

Ad esempio [25] si può immaginare di determinare lo spostamento gravitazionale di frequenza per orologi basati su fenomeni fisici diversi, quali le transizioni fini ed iperfini, o fenomeni elettromagnetici o «meccanici» tradizionali,

quali la frequenza di una cavità o di una barra. La stabilità dei campioni ed i progressi delle telemetrie hanno inoltre consentito la proposta [26] di porre degli orologi negli immediati dintorni del sole (1).

Questi nuovi usi degli orologi nelle ricerche di gravità sperimentale, richiedono:

- una miglior valutazione, di tipo relativistico dei fenomeni fisici che avvengono nell'interno dei diversi tipi di orologi atomici;
- progressi tecnologici nella costruzione in particolare per ridurre consumo, dimensioni, massa e sensibilità ai fattori ambientali;
- sviluppo delle ricerche tendenti all'orologio con stabilità, entro un anno, dell'ordine di 10^{-15} , con un miglioramento di due ordini di grandezza rispetto alla situazione attuale;
- diffusione delle tecniche di sincronizzazione con risoluzione attorno al nanosecondo (l'Italia non partecipa attualmente a queste attività, in Europa già avviate, da qualche anno, in Olanda, Francia, Germania, Svizzera, Grecia);
- migliore consapevolezza, nei fisici relativisti in particolare, delle intrinseche limitazioni di ogni orologio reale, presente o futuro.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GUYOT E.: *Histoire de la détermination des longitudes*, Chambre Suisse de l'Horlogerie, La Chaux-de-Fonds, 1955.
 - [2] *Time and Frequency*, NBS Monograph 140, B. E. Blair editor, Washington, 1974.
 - [3] LESCHIUTTA S. et Al.: *Applicazioni del sistema di navigazione Loran-C per misure di tempo e frequenza*, Alta Frequenza, XL, p. 550-560, 1971.
 - [4] ROVERA G.: *On the accuracy of the TV timing method*, Alta Frequenza, XLI, p. 822-824, 1972.
 - [5] Per una discussione su queste distinzioni ed una esposizione delle caratteristiche dei vari campioni, si vedano i volumi [2] e [6].
 - [6] *Metrology and Fundamental Constants*, Proc. SIF, vol. LXVIII, A. Ferro Milone, P. Giacomo, S. Leschiutta, Ed. North-Holland, Amsterdam, 1979.
 - [7] *Experimental Gravitation*, Proc. SIF, vol. LVI, Ed. B. Bertotti, Academic Press, New York, 1974.
- TONNELAT M. A.: *Les vérifications expérimentales de la relativité générale*, Masson et C.ie ed., Paris, 1964.
- REINHARDT V. S.: *Relativistic effects of the rotation of the Earth on remote clock synchronization*, Proc. 6th PTI Meeting, NASA-U.S. Dept. of Defense, Washington, 1974, p. 395-424.

(1) A proposito di questi e di altri esperimenti entro il sistema solare, è opportuno segnalare che sarà necessario un miglioramento nelle determinazioni della posizione angolare della terra, ed in particolare della polodia, in quanto altrimenti saranno problematiche le misure di posizione delle sonde spaziali effettuate con mezzi radioelettrici dalla terra e a distanza di anni.

- THOMAS V. B.: *A relativistic Analysis of clock synchronization*, Proc. 6th PTI Meeting, NASA-U.S. Dept. of Defense, Washington, 1974, p. 425-439.
- N. Ashby, cfr. rif. 21.
- [8] BERTOTTI B.: *Relativistic effects on time scales and signal transmission*, Time and Frequency Symposium, XIX URSI General Assembly, Helsinki, 1978.
 - [9] HAFELE J. e KEATING R.: *Around the world atomic clocks*, Science, vol. 177, p. 166-168, 1972.
 - [10] WINKLER G. M. R., HALL R. G., e PERCIVAL D. B.: *The U.S. Naval Observatory clock time reference and the performance of a sample of atomic clocks*, Metrologia, N. 6, p. 126-134, 1970.
 - [11] ANGELI M. T., DEL BELLO R., LESCHIUTTA S.: *The Main National Time Scales Compared with the Italian UTC (IEN) Time scale in the period 1970-74*, Alta Frequenza, XLIV, p. 558-568, 1975.
 - [12] WINKLER G. M. R. and VAN FLANDERN T. C.: *Ephemeris time, relativity, and the problem of uniform time in astronomy*, The Astronomical J., vol. 82, Jan. 1977.
 - [13] BRIATORE L. e LESCHIUTTA S.: *Evidence for the earth gravitational shift by direct atomic time-scale comparison*, Nuovo Cimento, vol. 37B (2), p. 219-231, 1977.
 - [14] ALLEY C. O.: *Atomic Clock Measurement of the General Relativistic Time Difference Produced by Aircraft Flights . . .*, memoria presentata all'International Meeting on Experimental Gravitation, Pavia, 17-20 settembre 1976.
 - [15] IJIMA S. e FUJIWARA: *An Experiment for the potential blue shift at the Norikura corona station*, Ann. Tokyo Astron. Obs., vol. 17 (1), p. 68-78, 1978.
 - [16] IJIMA S. et Al.: *Effect of the Environmental Conditions on the Rate of Cesium Clock*, Ann. Tokyo Astron. Obs., vol. 17 (1), p. 50-67, 1978.
 - [17] VESSOT R. et Al.: *The Design of an Atomic Hydrogen Maser System for satellite experiments*, Proc. 21st Annual Symposium on Frequency Control, p. 509-542, 1967.
 - [18] VESSOT R.: *Lectures on Frequency Stability and Clocks and on the Gravitational Red-shift Experiment - Experimental Gravitation*, Proc. SIF, vol. LVI, ed. B. Bertotti, Academic Press, New York, 1973.
 - [19] VESSOT R. e LEVINE M. W.: *A preliminary report on the gravitational red-shift rocket-probe experiment*, Proc. 2nd Frequency Standards and Metrology Symposium, Copper Mountain, USA, p. 660-688, 1976.
 - [20] Séme session du CIPM, BIPM, Sèvres, Francia, 1971, p. 521-523.
 - [21] ASHBY N.: *An Earth-based coordinate clock network*, NBS Technical Note 659, April 1975.
 - [22] BUISSON J. A. et Al.: *Initial Results of the Navstar GPS NTS-2 Satellite*, Proc. IX PTI Meeting, NASA Technical Memorandum 78104, p. 177-199, 1978.
 - [23] PETERS H. E. e REINHARDT V. S.: *Atomic Frequency Standard Relativistic Doppler Shift Experiment*, 28th Frequency Control, p. 247-255, 1974.
 - [24] BERTOTTI B., cfr. rif. 8.
 - [25] WILL C. M.: *Clocks and Experimental Gravitation*, Metrologia, vol. 13, p. 95-98, 1977.
 - [26] ANDERSON C., COLOMBO G., et Al.: *An arrow to the Sun, Experimental Gravitation*, p. 393, Accademia dei Lincei, Roma, 1977.

Torino, 14 settembre 1978

Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris — Torino.

ENRICO MASSA (*)

ASPETTI DINAMICI DELLA TEORIA RELATIVISTICA DELLA CONDUZIONE DEL CALORE.

Abstract.

The role of the mass-energy equivalence principle in the construction of a relativistically invariant theory of continuum thermodynamics is discussed. It is seen that, as a consequence of this principle, the study of the irreversible phenomena taking place within a given body B may be reduced to the study of the mutual interactions between two ideal subsystems of B , called respectively the heat subsystem and the material substratum. Applications to the phenomenon of heat conduction are discussed.

Introduzione.

Requisito essenziale di ogni teoria relativistica è che le perturbazioni di ogni campo fisico si propaghino con velocità *finita*, non superiore alla velocità della luce nel vuoto. Nell'ambito della Termodinamica, ciò rende automaticamente inaccettabili sia la teoria di Fourier per la conduzione calorica, sia la teoria di Navier-Stokes per la viscosità, ambedue incompatibili col requisito sopra indicato.

La ricerca di equazioni costitutive alternative, atte ad eliminare le difficoltà connesse con la velocità di propagazione infinita dei campi di temperatura e di accelerazione ha costituito uno degli argomenti ricorrenti nella letteratura scientifica degli ultimi trent'anni [2 ÷ 11], a partire dal lavoro di Cattaneo del 1948 [1]. In quest'ambito si colloca anche la presente memoria, nella quale verrà esaminato in maniera molto schematica il ruolo del principio di equivalenza massa-energia nella formulazione di una teoria relativistica della conduzione del calore.

Per maggiori dettagli, nonché per un'ampia bibliografia sull'argomento, si rimanda il lettore al lavoro [2].

(*) Istituto di Matematica, Università di Genova.

1. Considerazioni generali.

Nello spazio-tempo V_4 , sia Ξ la congruenza di linee di universo di un sistema continuo (corpo) B , e sia $V(\cdot)$ il corrispondente campo di quadrivelocità. Con le stesse notazioni di [2], indicheremo con $[\Xi]$ il sistema di riferimento determinato dalla congruenza Ξ in V_4 (d'ora innanzi detto il riferimento di quiete materiale), e con N e P gli operatori di proiezione spaziale e temporale in $[\Xi]$, definiti rispettivamente dalle equazioni (1)

$$(1.1) \quad N(A) = (\delta^\alpha_\beta + V^\alpha V_\beta) A^\beta = h^\alpha_\beta A^\beta; \quad P(A) = -V_\alpha A^\alpha$$

Seguendo la nomenclatura usuale, chiameremo inoltre *processo termocinetico* del continuo B una qualunque assegnazione della coppia $(\Xi, \theta(\cdot))$, in cui Ξ è la congruenza di linee di universo sopra citata, mentre $\theta(\cdot)$ è un campo scalare strettamente positivo su V_4 , identificato col campo della *temperatura assoluta* in B .

Ciò premesso, la costruzione di un *modello matematico* di B si articola sostanzialmente sui punti seguenti:

(i) rappresentazione dell'evoluzione di B in V_4 mediante un corrispondente insieme di campi $\lambda_1(\cdot) \dots \lambda_n(\cdot)$ o, equivalentemente, introduzione di uno spazio funzionale $\aleph^*$, detto lo *spazio rappresentativo* di B , formato dalla totalità delle n -uple $\mathcal{E} = (\lambda_1(\cdot) \dots \lambda_n(\cdot))$.

(ii) caratterizzazione del *risponso interno* di B , mediante un opportuno insieme di *equazioni costitutive*. In tutta generalità, queste hanno la natura di equazioni funzionali, mediante le quali ad ogni scelta delle variabili termocinetiche $\Xi, \theta(\cdot)$ è possibile associare una ed una sola evoluzione $\mathcal{E}$ di B a partire da dati iniziali assegnati. La totalità degli elementi $\mathcal{E} \in \aleph^*$ ottenuti in tal modo costituisce in generale un sottospazio $\aleph \subset \aleph^*$, detto lo spazio dei *processi ammissibili* di B .

(iii) rappresentazione dei vari *attributi* di B , come funzionali sullo spazio $\aleph^*$, a valori nell'algebra tensoriale su V_4 .

Per quanto concerne il punto (iii), un attributo essenziale, in ogni schema dinamico o termodinamico è il tensore energia-impulso di B . Quest'ultimo è definito come un'applicazione $T = T(\mathcal{E})$ dello spazio $\aleph^*$ nel modulo dei tensori doppi *simmetrici* su V_4 , e ha la funzione di caratterizzare il *risponso dinamico* del continuo B sotto l'azione di una densità di quadriforza *esterna* b^α , attraverso le equazioni di bilancio

(1) Il simbolo $:=$ sta per *def.* In tutta la trattazione è implicito l'uso di unità naturali ($c = 1$). Gli indici Greci variano da 0 a 3; quelli latini da 1 a 3. La segnatura della metrica è $- + + +$.

$$(1.2) \quad T^{\alpha\beta}_{;\beta} = b^\alpha$$

Pure importante in un ambito macroscopico è la densità di massa $m = m(\epsilon)$, definita come un campo scalare, strettamente positivo, e soddisfacente l'equazione di continuità

$$(1.3) \quad (m V^\alpha)_{;\alpha} = 0$$

Infine, in uno schema termodinamico, oltre alle quantità sopra citate è necessario assegnare a B due ulteriori attributi di natura non meccanica, vale a dire

a) la quadricorrente entropica, definita come un'applicazione $s = s(\mathcal{E})$ dello spazio $\mathfrak{K}^*$ nel modulo dei campi vettoriali su V_4 .

b) la temperatura dinamica, definita come un'applicazione $\Theta = \Theta(\mathcal{E})$ di $\mathfrak{K}^*$ nello spazio dei campi scalari strettamente positivi su V_4 .

Questi sono direttamente coinvolti nella formulazione della seconda legge della termodinamica, attraverso il seguente

ASSIOMA 1.1 (principio di dissipazione): per ogni $\mathcal{E} \in \mathfrak{K}^*$, si definisca *produzione entropica* associata ad $\mathcal{E}$ la quantità

$$(1.4a) \quad \sigma := s^\alpha_{;\alpha} - \frac{1}{\Theta} P(T^{\alpha\beta}_{;\beta}) = s^\alpha_{;\alpha} + \frac{1}{\Theta} V_\alpha T^{\alpha\beta}_{;\beta}$$

con $s = s(\mathcal{E})$, $\Theta = \Theta(\mathcal{E})$, $T = T(\mathcal{E})$. Allora, condizione *necessaria* affinché un modello matematico del continuo B sia fisicamente accettabile è che la disuguaglianza

$$(1.4b) \quad \sigma \geq 0$$

sussista identicamente su tutto il sottospazio $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}^*$ dei processi ammissibili di B .

Un processo $\mathcal{E} \in \mathfrak{K}^*$ è detto *reversibile* se la produzione entropica ad esso associata è identicamente nulla. Se il continuo B è isolato, le (1.4a, b) comportano $s^\alpha_{;\alpha} \geq 0$ per tutti i processi $\mathcal{E} \in \mathfrak{K}$ che verificano le equazioni di bilancio $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$. A questo proposito, si veda ad esempio [12].

Un'ultima parola di commento spetta infine alla definizione della quadricorrente entropica s . Sulla base di un'ovvio principio di corrispondenza, sembra naturale esprimere la risoluzione spaziale di s nel riferimento di quiete materiale $[\Xi]$ nella forma

$$(1.5) \quad s = m \eta V + \frac{1}{\Theta} \mathbf{q}$$

in cui lo scalare $\eta = \eta(\mathcal{E})$ e il vettore spaziale $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathcal{E})$ definiscono rispettiva-

mente l'entropia specifica e il flusso di calore nel riferimento $[\Xi]$. D'altra parte in numerose situazioni di interesse fisico, il flusso di calore costituisce anche il flusso totale di energia presente in B nel riferimento $[\Xi]$, e come tale è esprimibile in termini del tensore energia-impulso T nella forma [13]

$$(1.6) \quad \mathbf{q} = P \otimes N(T)$$

Nel seguito includeremo sistematicamente l'eq. (1.6) tra le ipotesi costitutive. Ciò semplifica evidentemente la descrizione del modello matematico, diminuendo il numero di attributi indipendenti del continuo B .

2. Teoria dinamica del calore.

Una delle realizzazioni più semplici dei concetti esposti nella Sez. 1 si ha nella costruzione del cosiddetto «modello puramente meccanico» del continuo B , caratterizzato dalle seguenti ipotesi costitutive:

(i) identificazione dello spazio rappresentativo $\aleph^*$ con lo spazio dei processi termocinetici, ossia possibilità di esprimere tutti gli attributi di B come funzionali degli argomenti $\Xi, \theta(\cdot)$.

(ii) identificazione della temperatura dinamica Θ con la temperatura assoluta θ .

(iii) annullarsi del flusso di calore $\mathbf{q}$ per ogni processo $\mathcal{E} \in \aleph$.

(iv) annullarsi della produzione entropica $\sigma \forall \mathcal{E} \in \aleph$.

In virtù delle equazioni (1.5), (1.6), l'ipotesi (iii) si concretizza nelle relazioni

$$(2.1) \quad s^\alpha = m \eta V^\alpha$$

$$(2.2) \quad \hat{T}^{\alpha\beta} = m (1 + \epsilon) V^\alpha V^\beta - S^{\alpha\beta}$$

in cui ϵ è l'energia specifica, e S il tensore di stress di B ($S_{\alpha\beta} V^\beta = 0$). Similmente, tenuto conto della definizione (1.4a), dell'ipotesi (ii) e delle equazioni (2.1), (2.2), l'ipotesi (iii) è espressa da

$$(2.3) \quad m \eta_{,\alpha} V^\alpha + \frac{1}{\theta} V_\alpha \hat{T}^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

Introdotta l'energia libera $\psi = \epsilon - \theta\eta$, l'eq. (2.3) può essere riscritta nella forma equivalente

$$(2.4) \quad m \psi_{,\alpha} V^\alpha = S^{\alpha\beta} V_{\alpha;\beta} - m \eta \theta_{,\alpha} V^\alpha$$

che esprime la condizione di *non dissipatività* per lo stress S .

Le proprietà precedenti escludono a priori la possibilità di inquadrare nello schema puramente meccanico fenomeni tipicamente irreversibili, quali la conduzione del calore o la viscosità. Inoltre, esse provano che, nello schema anzidetto,

ogni modello è caratterizzato dalla scelta di tre equazioni costitutive

$$(2.5) \quad \epsilon = \epsilon(\Xi, \theta(.)), \quad \eta = \eta(\Xi, \theta(.)), \quad S = S(\Xi, \theta(.)),$$

soggette al vincolo a priori (2.3) (o (2.4)).

Come primo passo verso la costruzione di schemi più generali, esaminiamo ora una situazione intermedia, in cui la sola causa di irreversibilità presente nel modello è dovuta alla conduzione calorica. In tal caso, la risoluzione spaziale del tensore energia-impulso nel riferimento $[\Xi]$ ha la forma generale

$$(2.6) \quad T_{\alpha\beta} = m(1 + \epsilon') V_{\alpha} V_{\beta} - S'_{\alpha\beta} + (q_{\alpha} V_{\beta} + q_{\beta} V_{\alpha})$$

con $q_{\alpha} V^{\alpha} = S'_{\alpha\beta} V^{\beta} = 0$. In realtà, l'eq. (2.6) altro non è che la *definizione* delle quantità ϵ' , S' , q . Coerentemente con quanto visto nella Sez. 1, identificheremo q col *flusso di calore*.

Per quanto concerne le altre due quantità ϵ' ed S' , l'ipotesi corrente è che, in assenza di viscosità, queste abbiano lo stesso significato di ϵ ed S nello schema puramente meccanico [13]. Un semplice argomento, tuttavia, mostra che un tale punto di vista non è del tutto soddisfacente, e può essere considerato al più come un'approssimazione di uno schema più realistico. Infatti, in conseguenza del principio di equivalenza massa-energia, la presenza di un flusso di calore q nel riferimento di quiete materiale implica la simultanea presenza di una densità di impulso, e quindi anche di una densità di energia cinetica, e di una densità di flusso d'impulso (a questo proposito, cfr. [14, 15]). In linea di principio, è quindi naturale aspettarci che tutti i contributi suddetti debbano figurare nella rappresentazione (2.6) del tensore energia-impulso totale.

Tale aspetto può essere inquadrato in maniera più quantitativa riguardando la conduzione del calore come effettivo *fenomeno di trasporto*, dovuto al fatto che, in opportune condizioni, *una certa frazione $m \delta_0$ della densità di energia presente nel corpo B può essere messa in movimento con velocità v rispetto al riferimento di quiete materiale*.

Ciò conduce ad una rappresentazione del flusso di calore q nella forma

$$(2.7) \quad q = \gamma m \delta_0 v = m \delta v \quad (v_{\alpha} V^{\alpha} = 0)$$

con $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, e $\delta = \gamma \delta_0$. In conseguenza di ciò, la densità di energia cinetica associata al processo è $(\gamma - 1) m \delta_0$, mentre la densità di flusso d'impulso è $m \delta v_{\alpha} v_{\beta}$. Per tener conto di questi contributi, e senza alcuna perdita di generalità, conviene sostituire la rappresentazione (2.6) del tensore energia-impulso con l'espressione equivalente

$$(2.8) \quad T_{\alpha\beta} = \hat{T}_{\alpha\beta} + (\gamma - 1) m \delta_0 V_{\alpha} V_{\beta} + m \delta v_{\alpha} v_{\beta} + (q_{\alpha} V_{\beta} + q_{\beta} V_{\alpha}) + W_{\alpha\beta}$$

in cui $\hat{T} = \hat{T}(\Xi, \theta(.))$ ha la stessa struttura formale del tensore energia impulso

coinvolto nel modello puramente meccanico di B , vale a dire

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = m(1 + \epsilon) V_{\alpha} V_{\beta} - S_{\alpha\beta}$$

col vincolo a priori (2.3), mentre il tensore W costituisce un termine aggiuntivo, che raccoglie ogni altro eventuale contributo al tensore energia-impulso totale, oltre a quelli già esplicitamente indicati a secondo membro dell'eq. (2.8). In particolare, l'ipotesi che la conduzione calorica sia la sola fonte di irreversibilità presente nel modello, comporta $T = \hat{T}$ per $v = 0$, ossia (cfr. equazioni (2.7), (2.8))

$$(2.9a) \quad W = 0 \quad \text{per} \quad v = 0$$

mentre il requisito che q rappresenti il flusso di energia *totale* nel riferimento di quiete materiale richiede l'ulteriore condizione

$$(2.9b) \quad P \otimes N(W) = 0$$

Dal punto di vista costitutivo, gli argomenti precedenti possono essere inquadrati in uno schema razionale assegnando al corpo B uno spazio rappresentativo $\mathcal{N}^*$ formato dalla totalità di elementi del tipo $\mathcal{E} = (\Xi, \theta(\cdot), \delta_0(\cdot), v(\cdot))$. La rappresentazione della sottoclasse $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^*$ dei processi ammissibili richiede allora l'introduzione di *quattro* equazioni costitutive

$$(2.10) \quad F_{(\lambda)}(\Xi, \theta(\cdot), \delta_0(\cdot), v(\cdot)) = 0 \quad (\lambda = 0, \dots, 3)$$

atte a determinare l'*evoluzione* dei campi $\delta_0(\cdot), v(\cdot)$ in funzione di $\Xi, \theta(\cdot)$ e dei dati iniziali (cfr. § 1, (ii)).

In questo senso, la costruzione di un modello matematico per il continuo B si articola sostanzialmente sui due punti seguenti: 1) rappresentazione dei vari attributi di B come funzionali sullo spazio $\mathcal{N}^*$ (cfr. § 1, (iii)), e 2) scelta delle equazioni (2.10) compatibilmente con le restrizioni imposte dalla seconda legge della termodinamica.

Per quanto concerne il punto 1), quanto detto in precedenza circa il flusso di calore suggerisce di riguardare l'intero corpo B come un *sistema binario*, formato da due sottosistemi interagenti: il *sottosistema calore* Q , caratterizzato dal tensore energia-impulso

$$(2.11) \quad Q_{\alpha\beta} = m \delta^0 U_{\alpha} U_{\beta}, \quad \delta^0 = \delta^0/\gamma, \quad U = \gamma(V + v)$$

e un ulteriore sottosistema S , detto il *substrato materiale* di B .

La congettura più naturale derivante dalle equazioni (2.8), (2.9a), (2.11) consiste allora nell'assegnare ad S il tensore energia-impulso

$$(2.12) \quad M_{\alpha\beta} = \hat{T}_{\alpha\beta} - m \delta_0 V_{\alpha} V_{\beta} = m(1 + \chi) V_{\alpha} V_{\beta} - S_{\alpha\beta}$$

con

$$\chi = \chi(\Xi, \theta(.), \delta_0(.)) = \epsilon(\Xi, \theta(.)) - \delta_0$$

e col vincolo a priori (cfr. eq. (2.3))

$$(2.13) \quad m \theta \eta_{,\alpha} V^\alpha + V_\alpha M^{\alpha\beta}_{;\beta} = (m \delta_0 V^\alpha)_{;\alpha}$$

In tal modo, il tensore energia-impulso totale (2.8) assume la forma

$$(2.14) \quad T_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta} + W_{\alpha\beta}$$

in cui $W_{\alpha\beta}$ gioca chiaramente il ruolo di un *tensore di interazione* tra i sottosistemi S e Q .

Il passo successivo consiste ora nell'introduzione di congetture adeguate riguardanti la natura delle equazioni costitutive (2.10), ossia l'evoluzione dei campi $\delta_0(.), v(.)$ in termini delle variabili termocinetiche $\Xi, \theta(.)$. Nell'ambito della rappresentazione binaria sopra descritta, il problema è evidentemente di natura *dinamica*, e coinvolge una ben precisa caratterizzazione delle *interazioni* tra i sottosistemi S e Q .

In quest'ordine di idee, introduciamo la densità di quadriforza f agente su Q e la densità di potenza ζ *persa* dal substrato S nel riferimento di quiete materiale $[\Xi]$, mediante le usuali definizioni

$$(2.15a) \quad f^\alpha := Q^{\alpha\beta}_{;\beta} = (m \delta^0 U^\alpha U^\beta)_{;\beta}$$

$$(2.15b) \quad \zeta := -P(M^{\alpha\beta}_{;\beta}) = V_\alpha M^{\alpha\beta}_{;\beta}$$

Indicata con $f_\perp$ la componente trasversa di f , sussistono le relazioni

$$(2.16) \quad f^\alpha_\perp := (\delta^\alpha_\lambda + U^\alpha U_\lambda) f^\lambda = m \delta^0 U^\alpha_{;\lambda} U^\lambda$$

$$(2.17a) \quad f^\alpha_\perp = \tilde{f}^\alpha + \pi V^\alpha$$

$$(2.17b) \quad \pi = \tilde{f}^\alpha v_\alpha$$

in cui, per definizione, il vettore spaziale $\tilde{f}$ e lo scalare π indicano rispettivamente la *forza meccanica* e la *potenza meccanica* agenti su Q nel riferimento $[\Xi]$. Dalle equazioni (2.16), (2.17a, b) appare allora evidente che lo studio dell'evoluzione della quadrivelocità U (o, equivalentemente, della velocità spaziale v) coinvolge l'introduzione di un'opportuna rappresentazione della forza meccanica f come funzionale

$$(2.18) \quad \tilde{f} = \tilde{f}(\Xi, \theta(.), \delta_0(.), v(.))$$

sullo spazio $\mathfrak{N}^*$. Analogamente, in virtù delle equazioni (2.13), (2.15b), lo studio dell'evoluzione del campo δ_0 è riconducibile all'introduzione di un ulteriore funzionale

$$(2.19) \quad \zeta = \zeta(\Xi, \theta(.), \delta_0(.), v(.))$$

In conclusione, per quanto riguarda il tipo di modelli in studio, il problema della caratterizzazione della classe $\mathfrak{N}$ dei processi ammissibili poggia interamente sulla scelta dei funzionali (2.18), (2.19).

Dal punto di vista fisico, la situazione è ulteriormente chiarita chiamando in causa, oltre all'eq. (2.16), anche l'equazione di bilancio energetico per il sottosistema calore. A tale proposito, introdotta la notazione

$$(2.20) \quad \gamma \zeta^* := V_\alpha (M^{\alpha\beta}_{;\beta} + W^{\alpha\beta}_{;\beta}) - \pi = \zeta - \pi + V_\alpha W^{\alpha\beta}_{;\beta}$$

l'eq. (2.15a) permette di scrivere

$$(2.21) \quad \gamma(m \delta^0 U^\alpha)_{;\alpha} = P(f) - \pi = -V_\alpha T^{\alpha\beta}_{;\beta} + \gamma \zeta^*$$

Ora, per definizione, la quantità $\gamma(m \delta^0 U^\alpha)_{;\alpha}$ rappresenta la parte non meccanica della densità di potenza $P(f)$ trasferita a Q nel riferimento $[\Xi]$.

Ambidue i termini $-V_\alpha T^{\alpha\beta}_{;\beta}$ e $\gamma \zeta^*$ che compaiono nell'eq. (2.21) costituiscono pertanto altrettanti contributi al processo di *produzione di calore* all'interno del corpo B . In particolare, il primo termine rappresenta i contributi *esterni* al processo suddetto, mentre il secondo tien conto degli eventuali *scambi energetici* tra i sottosistemi S e Q . Ciò è confermato dal fatto che, in assenza di conduzione di calore ($v = 0$) le equazioni (2.9a), (2.17b), (2.20) implicano $\zeta^* = \zeta$, per cui, in tal caso, tutta la potenza persa dal substrato nel riferimento $[\Xi]$ è convertita interamente in densità di massa invariante di Q . Nel caso generale ($v \neq 0$), la situazione è più complicata, sia per la necessità di tener conto anche del tensore di interazione W , sia per il fatto che, in linea di principio, non si può escludere la possibilità che parte della potenza ζ persa da S sia trasferita a Q sotto forma di lavoro meccanico, e vada quindi sottratta al meccanismo di produzione del calore. Senza entrare nei dettagli (per i quali si rimanda alla ref. [2]), ricordiamo soltanto che la più semplice congettura circa la natura delle interazioni tra S e Q conduce all'identificazione

$$(2.22a) \quad \zeta = \zeta^* + \pi/\gamma$$

che, unitamente all'eq. (2.20), fornisce anche

$$(2.22b) \quad V_\alpha W^{\alpha\beta}_{;\beta} = (\gamma - 1) \left(\zeta^* + \frac{\pi}{\gamma} \right) = (\gamma - 1) \zeta$$

Per completare lo schema matematico, dobbiamo ancora dare una formulazione esplicita della seconda legge della termodinamica. Come già visto nel §1, ciò richiede in particolare la scelta di una caratterizzazione costitutiva per la temperatura dinamica Θ . A tale proposito, introdotta per semplicità la quantità adimensionale $v = \gamma \theta/\Theta$, e ricordando l'eq. (2.7), riscriviamo l'eq. (1.5) nella forma

$$s = m \eta V + \frac{v}{\gamma \theta} q = m \eta V + \frac{v}{\theta} m \delta_0 v$$

Utilizzando esplicitamente le equazioni (2.11), (2.13), (2.21), (2.22a), la produzione entropica (1.4a) può allora essere riscritta

$$\sigma = (1-v) m \eta_{,\alpha} V^\alpha + \frac{1}{\theta} m \delta_0 v^\alpha v_{,\alpha} + \frac{v}{\gamma \theta^2} (-\gamma m \delta_0 v^\alpha \theta_{,\alpha} - \theta \pi)$$

Da ciò segue immediatamente che la più semplice congettura consiste nell'assumere $v = 1$, da cui l'equazione costitutiva

$$(2.23) \quad \Theta = \gamma \theta$$

Sotto tale ipotesi, ricordando la definizione (2.17b) della potenza meccanica π la disuguaglianza entropica si riduce a

$$(2.24) \quad \sigma = -q^\alpha \left(\theta_{,\alpha} + \frac{1}{m\delta} \tilde{f}_\alpha \right) \geq 0$$

che differisce dalla corrispondente espressione classica per la presenza della forza meccanica $\tilde{f}$.

Nel caso di continui isotropi, la più semplice espressione compatibile con la (2.24) è

$$(2.25) \quad q^\beta = -\kappa g^{\beta\alpha} \left(N(\theta_{,\alpha}) + \frac{\theta}{m\delta} \tilde{f}_\alpha \right)$$

dove $\kappa > 0$ è la conducibilità termica. Introdotta la notazione $\tilde{\theta}_\alpha = N(\theta_{,\alpha})$, la (2.25) diviene

$$(2.26) \quad \tilde{f}_\alpha = -\frac{m\delta}{\kappa\theta} (q_\alpha + \kappa \tilde{\theta}_\alpha)$$

Ora, nel limite classico, la forza spaziale $\tilde{f}$ può essere identificata con la derivata materiale della densità di impulso associata al flusso di calore q . In tal caso, posto $\tau_c := \kappa \theta / m \delta_0$, la (2.26) fornisce

$$(2.27) \quad q_\alpha + \tau_c q_{\alpha} = -\kappa \tilde{\theta}_\alpha$$

ossia l'equazione di Maxwell-Cattaneo.

Ciò conferma che la teoria dinamica qui sviluppata è automaticamente consistente col requisito della velocità di propagazione finita, almeno per quanto riguarda le onde di temperatura.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CATTANEO C., Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 3 (1948), 83.
- [2] MASSA E., MORRO A., Ann. Inst. Henri Poincaré (in corso di stampa).
- [3] MÜLLER I., Zeit. Phys. 198 (1967), 329.
- [4] LEBON G., LAMBERMONT J., J. Mécan. 15 (1976), 579.
- [5] COLEMAN B. D., NOLL W., Arch. Rational Mech. Anal. 13 (1963), 167.
- [6] BOGY D. B., NAGHDI P. M., J. Math. Phys. 11 (1970), 917.
- [7] MORRO A., Meccanica (in corso di stampa).
- [8] BRESSAN A., Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 34 (1964), 1.
- [9] LIANIS G., Arch. Rational Mech. Anal. 55 (1974), 300.
- [10] CARRASSI M., MORRO A., Nuovo Cimento 9B (1972), 321.
- [11] COLEMAN B. D., GREENBERG J. M., GURTIN M. E., Arch. Rational Mech. Anal. 22 (1966), 333.
- [12] MÜLLER I., Arch. Rational Mech. Anal. 34 (1969), 259.
- [13] ECKART C., Phys. Rev. 58 (1940), 919.
- [14] LANDAU L., LIFCHITZ E., *Mécanique des Fluides*, MIR (1971).
- [15] KALISKI S., Bull. Acad. Pol. Sci., Sci. Tech. 13 (1965), 211.

S. MORISETTI (*), C. REINA (*), A. TREVES (*)

CLASSIFICAZIONE DI PETROV
DI VARIETA' ASSISIMMETRICHE VUOTE**.

Summary. Petrov Classification of Vacuum Axisymmetric Space Times. Using the null bivector approach, Petrov classification is studied for axisymmetric vacuum space times. It is shown that the equation on which the classification is based is biquadratic. This excludes that any space time can be type III. The only type N manifolds are the radiative solutions considered by Hoffman. Van Stockum solutions are the most general type II solutions.

Degenerate Weyl solutions and Kinnersley solutions cover type D. Stationary solutions with functional dependence of the potential are then examined. It is found that except for particular cases, Papapetrou and Lewis solutions are algebraically general.

Nell'ambito del formalismo di Newman Penrose, lo studio della struttura algebrica del tensore di Weyl (classificazione di Petrov 1969) si riduce all'esame della degenerazione dell'equazione

$$(1) \quad C_{11} \xi^4 + 4C_{12} \xi^3 \eta + 6C_{13} \xi^2 \eta^2 + 4C_{23} \xi \eta^3 + C_{33} \eta^4 = 0$$

dove i C sono le componenti del tensore di Weyl riferite a una base di bivettori nulli. (Si veda p.e. Bampi et al, 1976). Lo schema di classificazione è riportato nella tabella.

<i>Radici</i>	<i>Tipo di Petrov</i>
4 distinte	I
2 coincidenti, 2 distinte	II
3 coincidenti	III
4 coincidenti	N
coincidenti in coppia	D

(*) Istituto di Fisica dell'Università, Milano.

(**) I risultati qui riportati sommariamente sono derivati in dettaglio in un articolo sottoposto alla rivista «Journal of Mathematical Physics».

Seguendo Ernst (1975) scriviamo l'elemento di linea assisimmetrico nella forma

$$(2) \quad ds^2 = 2\omega^{(1)}\omega^{(2)} + 2\omega^{(3)}\omega^{(4)}$$

dove

$$(3) \quad \begin{aligned} \omega^{(1)} &= \mu(dr + i dz) & \omega^{(2)} &= \omega^{(1)} \\ \omega^{(3)} &= \sqrt{\frac{f}{2}}(\lambda dq - dt) & \omega^{(4)} &= \sqrt{\frac{f}{2}}(\nu dq + dt) \\ \lambda &= \alpha + \omega & \nu &= \alpha - \omega & \alpha &= r/f. \end{aligned}$$

Si introduca la base dei bivettori

$$(4) \quad \begin{aligned} Z^I &= 2\omega^{(4)} \wedge \omega^{(2)} \\ Z^{II} &= 2\{\omega^{(1)} \wedge \omega^{(2)} + \omega^{(3)} \wedge \omega^{(4)}\} \\ Z^{III} &= 2\omega^{(3)} \wedge \omega^{(1)} \\ Z^{IV} &= \bar{Z}^I \\ Z^V &= \bar{Z}^{II} \\ Z^{VI} &= \bar{Z}^{III}. \end{aligned}$$

Si esprima il tensore di Weyl nella forma

$$(5) \quad C = C_{AB} Z^A Z^B.$$

Richiedendo che esso sia reale, si trova che le sue componenti non nulle sono

$$C_5 = C_{II}, C_3 = C_{I III} = C_{II II} C_I = C_{III III}$$

così che l'eq. (1) si riduce alla biquadratica

$$(6) \quad C_5 \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^4 + 6C_3 \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^2 + C_I = 0.$$

Lo schema di classificazione si può esprimere come segue

a) *Tipo I.*

$C_I \neq 0, C_3 \neq 0, C_5 \neq 0, C_I C_5 \neq 9 C_3^2$. L'equazione (6) ha quattro radici distinte e perciò la varietà è algebricamente generale.

b) *Tipo II.*

$C_I = 0, C_3 C_5 \neq 0$ oppure $C_5 = 0, C_3 C_I \neq 0$. L'equazione (6) ha due radici distinte e due coincidenti.

c) *Tipo N.*

$C_3 = C_1 = 0$, $C_5 \neq 0$ oppure $C_3 = C_5 = 0$, $C_1 \neq 0$. Le quattro radici sono coincidenti.

d) *Tipo D.*

$C_1 = C_5 = 0$, $C_3 \neq 0$ oppure $9C_3 = C_1 C_5$, Ci sono due radici degeneri.

e) *Tipo 0.*

$C_1 = C_3 = C_5 = 0$. Lo spazio è piatto.

Dallo studio diretto dell'eq. (6) si deduce che la metrica (2) non contiene soluzioni di tipo III e di tipo N. Le soluzioni di tipo N assisimmetrico sono quelle studiate da Hoffman (1969) che però non sono rappresentabili nella forma (2). Facendo uso delle identità di Bianchi si dimostra a) che la più generale varietà di tipo II coincide con le soluzioni di Van Stockum; b) che le soluzioni di tipo D sono le soluzioni di Weyl degeneri studiate recentemente da Ehlers e Kundt (1969) oppure le soluzioni di Kinnersley (1969). Da un esame diretto delle altre soluzioni assisimmetriche in cui i potenziali sono funzionalmente dipendenti, si trova che tranne casi particolari, le metriche di Papapetrou e di Lewis sono di tipo I.

BIBLIOGRAFIA.

- BAMPI F., CAVIGLIA G., MASSA E., ZORDAN G.: *Bivettori Complessi in Relatività Generale*, Quaderni del CNR, Genova (1976).
- EHLERS J. e KUNDT W., in *Gravitation: an Introduction to Current Research* a cura di L. Witten, Wiley (1962).
- ERNST F. J., J. Math. Phys. 15, 1049 (1974).
- HOFFMAN R. B., J. Math. Phys. 10, 953 (1969).
- KINNERSLEY W., J. Math. Phys. 10, 1195 (1969).
- PETROV A. Z., *Einstein Spaces*, Pergamon Press (1969).

F. OCCHIONERO (*), N. VITTORIO (*)

CONDENSAZIONI DI GALASSIE IN UNIVERSI A BASSA DENSITA'.

Abstract.

Under the assumption that the large scale structure observed in the present Universe can be explained by dissipationless gravitational clustering, we generalize the theory of linear growth of gravitational instability to the case of a positive cosmological constant.

The results suggest that some of the difficulties experienced by the $\Lambda = 0$ cosmologies in explaining quantitatively the observed degree of clustering, may then be removed.

This is due to the fact that, when $\Lambda > 0$, a low density Universe may well have positive spatial curvature, instead of being necessarily $k = -1$ as it is the case for $\Lambda = 0$. Thus, on one side the constraint defining gravitational binding for each condensation is eased and, on the other, the very growth of the linear modes is favored.

Nell'ipotesi che la struttura dell'Universo osservata su larga scala (~ 50 Mpc) possa essere spiegata da fenomeni di condensazione gravitazionale non dissipativa, generalizziamo la teoria della crescita lineare delle instabilità gravitazionali al caso di una costante cosmologica positiva.

Il grado di addensamento delle Galassie viene misurato dalla cosiddetta funzione di correlazione che suggerisce direttamente che la causa principale per l'evoluzione di inomogeneità in un Universo inizialmente uniforme sia stata proprio l'instabilità gravitazionale. Da un punto di vista quantitativo tuttavia, esistono delle difficoltà nel riconciliare la funzione di correlazione osservata con quella calcolata in un Universo di bassa densità; quest'ultima convinzione deriva sia dall'argomento teorico del deuterio primordiale che dalla pura e semplice stima della materia visibile. In termini più precisi, il parametro di densità,

(*) Laboratorio di Astrofisica Spaziale, CNR, Frascati.

$$(1) \quad \Omega_0 = \rho_0 / \rho_{\text{crit}}, \quad \rho_{\text{crit}} = 3 H_0^2 / (8\pi G)$$

è solamente dell'ordine di 0,1, mentre dovrebbe essere almeno dell'ordine di 0,3 per spiegare il grado di condensazione osservato. Infine la rivalutazione proposta da alcuni Autori per un fattore 2 della costante di Hubble aggraverebbe ancora la difficoltà.

Incidentalmente ricordiamo che secondo la scuola sovietica, in alternativa al quadro precedente, la struttura menzionata sopra si forma non per condensazione gravitazionale, ma per fenomeni dissipativi che avvengono nelle fasi di collasso di masse più grandi che si frammentano poi in galassie. Tuttavia, noi non prendiamo in esame questa possibilità e lavoriamo invece nello schema della condensazione gravitazionale.

Per comprendere e superare la difficoltà menzionata sopra, studiamo l'evoluzione in regime lineare delle perturbazioni di densità

$$(2) \quad h = \delta\rho/\rho = \delta n/n;$$

esse obbediscono ad una equazione differenziale molto semplice in un Universo di polvere e nell'ipotesi di grandi numeri d'onda.

$$(3) \quad \left(\frac{1}{R^2} \frac{d}{dt} R^2 \frac{d}{dt} - 4\pi G\rho \right) h = 0,$$

dove R è il fattore di scala della metrica di Friedmann-Robertson-Walker. I due integrali indipendenti della (3) corrispondono a un modo crescente, h^+ , e ad un modo smorzato, h^- , dei quali ovviamente solo il primo ci interessa. Nel caso semplice di una cosmologia Einstein-de Sitter, $\Omega_0 = 1$ cioè $k = 0$, in particolare

$$(4) \quad h^+ = (1+z)^{-1}$$

dove z è il redshift. Soluzioni analitiche esatte, più complesse della (4), sono note anche per $k = \pm 1$ (cioè rispettivamente $\Omega_0 \gtrless 1$) per $\Lambda = 0$; con queste si può studiare l'amplificazione

$$(5) \quad A = h^+(z)/h^+(z_1)$$

di una perturbazione che nasce al redshift z_1 con ampiezza $h^+(z_1)$.

Studiando A si può valutare se una perturbazione riesce ad entrare nelle fasi non lineari del collasso in epoche ragionevoli ($h^+(z) = A h^+(z_1) > 1$ per $z > 0$). Limitandoci a considerare per semplicità il caso di fluttuazioni statistiche in un gas di semi di condensazione della stessa massa (benché esistano buone ragioni per postulare nelle fluttuazioni iniziali più potenza alle grandi lunghezze d'onda) riproduciamo il ben noto argomento semiquantitativo secondo il quale in un Universo a bassa densità ($\Omega_0 < 1$, $k = -1$, $\Lambda = 0$) A cresce secondo la legge

(4) solo fino al redshift $z_0 = \Omega_0^{-1}$.

Inoltre riusciamo a mostrare come uno schema di condensazione gerarchica è favorito: infatti è stato suggerito che all'epoca del disaccoppiamento radiazione-materia, cioè a $z = 1000$, gli oggetti di prima generazione che si formano siano grosse stelle di $10^6 M_\odot$. In queste condizioni sarebbe estremamente interessante poter giustificare prima il loro addensarsi in galassie, poi l'addensarsi di galassie in gruppi e così via.

La costante cosmologica è stata rispolverata molte volte negli ultimi 60 anni e sempre poi rimessa al suo posto sugli scaffali. Ultimamente una stima per il parametro di decelerazione q_0 ha dato un valore negativo, cioè ha suggerito che l'Universo si espanda in modo accelerato; ciò implica $\Lambda > 0$. Ancora più recentemente una nuova esigenza per $\Lambda > 0$ è venuta da stime della costante di Hubble H_0 attorno ai 100 km/sec/Mpc; ciò implica un tempo di Hubble, H_0^{-1} , dell'ordine di 10 miliardi di anni. Poiché si conoscono stelle negli ammassi globulari di almeno 16 miliardi di anni, sembra riapparire il vecchio problema di Lemaître la cui soluzione risiede notoriamente in $\Lambda > 0$.

Dunque accettando $\Lambda > 0$ e $H_0 = 100$ km/sec/Mpc, si tratta di definire con precisione i parametri di densità e di decelerazione che caratterizzano il modello di Universo: possiamo derivare il primo alternativamente dall'argomento del deuterio o dalla stima della materia luminosa ed il secondo dalla richiesta che l'età dell'Universo sia quella menzionata sopra. Nel primo e nel secondo caso ci dedichiamo alla soluzione numerica della (3): il risultato è che i modi normali si amplificano ora molto di più che nel caso $\Lambda > 0$ e non interrompono la loro crescita a $z = \Omega_0^{-1}$; in qualche caso addirittura l'amplificazione è superiore alla (4). Il motivo di tutto ciò è che in presenza di $\Lambda > 0$ un modello a bassa densità può avere curvatura spaziale positiva e che è proprio quest'ultima ad esercitare una grande influenza sulla crescita dei modi normali.

Per questa strada sembra dunque possibile un superamento della difficoltà iniziale.

BIBLIOGRAFIA

BONNOR W. B.: 1957, *MNRAS* **117**, 104.

BONNOR W. B.: 1967, in *Relativity Theory and Astrophysics*, J. Ehlers ed., American Mathematical Society, Providence, RI.

BOYNTON P. E.: 1978, in *The Large Scale Structure of the Universe*, M. S. Longair and J. Einasto eds., IAU Symposium No. 79, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.

CADERNI N., DE COSMO V., FABBRI R., MELCHIORRI B., MELCHIORRI F. and NATALE U.: 1977, *Phys. Rev. D*, **16**, 2424.

DAVIS M., GROTH E. J., and PEEBLES P. J. E.: 1977, *Astrophys. J.*, **212**, L 107.

- DE VAUCOULEURS G.: 1978, in *The Large Scale Structure of the Universe*, M. S. Longair and J. Einasto eds., IAU Symposium No. 79, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.
- DOROSHKEVICH A. G., SUNYAEV R. A. and ZEL'DOVICH Ya. B.: 1974, in *Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data*, M. S. Longair ed., IAU Symposium No. 63, Reidel Publ. Co., Dordrecht.
- EDWARDS D. and HEATH D.: 1976, *Astrophys. Sp. Sci.* **41**, 183.
- FALL S. M.: 1978, *Rev. Mod. Phys.* (in press).
- GOTT J. R. III, GUNN J. E., SCHRAMM D. N. and TINSLEY B. M.: 1974, *Astrophys. J.* **194**, 543.
- GOTT J. R. III and REES M. J.: 1975, *Astron. Astrophys.*, **45**, 365.
- GOTT E. J. and PEEBLES P. J. E.: 1975, *Astron. Astrophys.*, **41**, 143.
- GROTH E. J. and PEEBLES P. J. E.: 1975, *Astron. Astrophys.*, **41**, 143.
- GUNN J. E.: 1978, in *Observational Cosmology*, A. Maeder, L. Martinet and G. Tamman eds., Swiss Society of Astronomy and Astrophysics, Geneva.
- GUNN J. E. and GOTT J. R.: 1972, *Astrophys. J.*, **176**, 1.
- GUNN J. E. and OKE J. B.: 1975, *Astrophys. J.*, **195**, 225.
- GUNN J. E. and TINSLEY B. M.: 1975, *Nature*, **257**, 454.
- GUNN J. E. and TINSLEY B. M.: 1976, *Astrophys. J.*, **210**, 1.
- HARRISON E. R.: 1967, *Rev. Mod. Phys.*, **39**, 862.
- HEATH D. J.: 1977, *MNRAS*, **179**, 351.
- LIFSHITZ E. M.: 1946, *J. Phys. USSR*, **10**, 116.
- LYNDEN-BELL D.: 1977, *Nature*, **270**, 396.
- LYNDEN-BELL D., 1978, in *The Large Scale Structure of the Universe*, M. S. Longair and J. Einasto eds., IAU Symposium No. 79, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.
- Mc VITTIE G. C.: 1965, *General Relativity and Cosmology*, Chapman and Hall, London.
- OSTRIKER J. P. and TREMAINE S. D.: 1975, *Astrophys. J. Lett.*, **202**, L 113.
- PEEBLES P. J. E.: 1974, *Astrophys. J.*, **189**, L 51.
- PEEBLES P. J. E.: 1978, in *The Large Scale Structure of the Universe*, M. S. Longair and J. Einasto eds., IAU Symposium No. 79, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.
- PETROSIAN V.: 1974, in *Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data*, IAU Symposium No. 63, M. S. Longair ed., Reidel Publ. Co., Dordrecht.
- PRESS W. H. and SCHECHTER P.: 1974, *Astrophys. J.*, **187**, 425.
- REES M. J. and SCIAMA D. W.: 1969, *Comm. Astrophys. Sp. Sci.*, **1**, 153.
- SILK J.: 1968, *Astrophys. J.*, **151**, 459.
- SILK J.: 1977, *Astron. Astrophys.*, **59**, 53.
- SUNYAEV R. A.: 1971, *Astron. Astrophys.*, **12**, 190.
- SUNYAEV R. A. and ZEL'DOVICH Ya. B.: 1969, *Comm. Astrophys. Sp. Sci.*, **1**, 159.

TINSLEY B. M.: 1977, *Phys. Today*, **30**, 32.

TINSLEY B. M.: 1978, *Nature*, **273**, 208.

TOTSUJI H. and KIHARA T.: 1969, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **21**, 221.

WAGONER R. V.: 1974, in *Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data*, IAU Symposium No. 63, M. S. Longair ed., Reidel Publ. Co., Dordrecht.

WEINBERG S.: 1972, *Gravitation and Cosmology*, J. Wiley, New York, NY.

WHITE S. D. M. and RESS M. J.: 1978, *MNRAS*, **183**, 341.

ZEL'DOVICH Ya. B.: 1970, *Astron. Astrophys.*, **5**, 84.

ZEL'DOVICH Ya. B.: 1978, in *The Large Scale Structure of the Universe*, M. S. Longair and J. Einasto eds., IAU Symposium No. 79, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.



AGOSTINO PRASTARO (*)

SPAZI DERIVATI E FISICA DEL CONTINUO IN RELATIVITA' GENERALE.

Abstract.

In order to give an axiomatic description of continuum physics, a *derivative space*, $\mathcal{D}^k(V, W)$, is introduced which allows us to describe the derivative of order k of a differentiable map $f : V \rightarrow W$ as section of the fiber bundle $\mathcal{D}^k(V, W) \rightarrow V$. *Derivative operators* and *functional differential operators* are seen as useful generalizations of the usual differential operators. With this language we recognize a structural order to all physical entities which are characteristic in continuum physics.

Lo sviluppo della fisica del continuo ha avuto dal punto di vista matematico, un'evoluzione che sostanzialmente si può sintetizzare attraverso le seguenti tappe: (1) formulazione variazionale di leggi di conservazione, (2) utilizzo del calcolo di Ricci e Levi-Civita, (3) approccio di Cartan, nonché i più recenti lavori di Truesdell, Noll, Wang, Lichnerowicz, etc. che sostanzialmente utilizzano il linguaggio della geometria differenziale nella fisica dei sistemi continui. [1] — [5].

La mia attuale filosofia di ricerca è di trasportare lo spirito Bourbakista nella fisica in modo da organizzarla in strutture e quindi acquisirne una comprensione in modo unitario e geometrico. In questa comunicazione esporrò alcuni risultati ottenuti in questa direzione; vedere anche i lavori riportati in [6]. In essi faccio vedere com'è possibile riconoscere un ordine strutturale nell'insieme delle categorie fisiche come spazi di configurazione e di stato, equazioni dinamiche, costitutive e vincolari, proprietà di simmetria etc. che sono proprie della fisica dei continui.

A tale fine è stato necessario introdurre il primo e più importante elemento strutturale, cioè lo *spazio derivativo*, $\mathcal{D}^k(V, W)$ quale ambiente naturale per le

(*) Università degli Studi della Calabria, Dipartimento di Matematica Roges (Cosenza).

derivate. In riferimento a due varietà differenziali V e W , $\mathcal{D}^k(V, W)$ è definito

$$\mathcal{D}^k(V, W) \equiv d^* \mathcal{D}(V, \mathcal{D}^{k-1}(V, W)), \quad \mathcal{D}(V, W) \equiv T^*V \otimes TW$$

essendo T il simbolo di funtore tangente e $d^* \mathcal{D}(V, \mathcal{D}^{k-1}(V, W))$ la immagine reciproca del fibrato $\mathcal{D}(V, \mathcal{D}^{k-1}(V, W)) \rightarrow V \times V$ rispetto all'applicazione diagonale $d : V \rightarrow V \times V$. La derivata k -ma di un'applicazione differenziabile (almeno C^k), $f : V \rightarrow W$, risulta data da $D^k f \equiv D(\mathcal{D}^{k-1} f) : V \rightarrow \mathcal{D}^k(V, W)$. $D^k f$ risulta una sezione del fibrato $\mathcal{D}^k(V, W) \rightarrow V$. Prendendo un sistema di coordinate su V e W abbiamo indotto su $\mathcal{D}^k(V, W)$ un ben definito sistema di coordinate locali e quindi possiamo fare una rappresentazione locale di $D^k f$. Così, per esempio, al primo ordine otteniamo $Df = (\partial x_i \cdot f^j) dx^i \otimes \partial y_j \circ f$. Su $\mathcal{D}^k(V, W)$ possiamo riconoscere una struttura, che si dimostra particolarmente utile nella fisica-matematica, e cioè quella di fibrato di oggetti geometrici (1) [7], [8]: $(\mathcal{D}^k(V, W), V \times W, \pi_{V \times W}; \mathcal{D}^k)$ dove $\mathcal{D}^k$ è il funtore covariante che caratterizza $\mathcal{D}^k(V, W)$. Fra la nota struttura di spazio dei jetti di ordine k , $J^k(V, W)$ e $\mathcal{D}^k(V, W)$ esiste una stretta relazione; si ha infatti una iniezione canonica $J^k(V, W) \xrightarrow{ik} \mathcal{D}^k(V, W)$, che permette di identificare $J^k(V, W)$ con un sotto-fibrato $J\mathcal{D}^k(V, W)$ di $\mathcal{D}^k(V, W)$. $\mathcal{D}^k(V, W)$ presenta alcuni vantaggi rispetto a $J^k(V, W)$: lo spazio derivativo ha una struttura algebrica ben chiara e le derivate hanno proprio valore in $\mathcal{D}^k(V, W)$. Inoltre essendo $\mathcal{D}^k(V, W)$ uno spazio più ampio di $J^k(V, W)$, ci permette di estendere il concetto di operatore differenziale a quello di *operatore derivativo*. Più precisamente un operatore derivativo di ordine k è un morfismo di fibrato O tale che il seguente diagramma sia commutativo,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^k(V, W) & \xrightarrow{O} & M \\ \downarrow & \nearrow & \\ B & & \end{array}$$

dove M e $\mathcal{D}^k(V, W)$ sono supposti fibrati su B .

Un tale concetto risulta utile per trattare per es., oltre che la derivata, il differenziale assoluto di una sezione, s , di un fibrato $W \rightarrow V$, su quale sia stata definita una connessione lineare Γ . Infatti abbiamo $\nabla s = \tilde{\Gamma}^v$ o Ds dove $\tilde{\Gamma}^v \equiv id_{T^*V} \otimes \Gamma$ risulta appunto un operatore derivativo del primo ordine.

Un'ulteriore generalizzazione interessante del concetto di operatore differenziale si ottiene considerando *operatori derivativi funzionali* (di ordine k) cioè applicazioni $F : C^\infty(\mathcal{D}^k(V, W)) \rightarrow C^\infty(M)$, tramite le quali si ha la possibilità,

(1) La struttura matematica «fibrato di oggetti geometrici» non è stata in alcun modo sfruttata, a quanto mi risulta, in fisica-matematica, mentre è estremamente utile al fine di trattare, per esempio, problemi di invarianza, che sono comuni nella fisica, o estensioni degli operatori differenziali dal calcolo tensoriale a oggetti più complessi.

per esempio, di descrivere campi non locali ed applicazioni costitutive di materiali tipo memoria.

Tramite la derivata, così come è stata definita qui, si possono descrivere tutti gli operatori differenziali della fisica-matematica in modo intrinseco.

Il caso del differenziale assoluto, già accennato, è un importante esempio. Per brevità, ricordiamo qui soltanto ancora, la derivata di Lie di un campo di oggetti geometrici s di $(W, V, \pi_V; B)$ rispetto un campo vettoriale X su V generato da un gruppo ad un parametro ϕ :

$$\mathcal{L}_X s = \partial(\phi s \circ d) \equiv D_1(\phi s \circ d) \circ j$$

dove $\phi s \equiv \bar{\phi} \circ (id_R, s) \circ (id_R, \phi) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times V \rightarrow W$, essendo $\bar{\phi} : \mathbf{R} \times W \rightarrow W$ tale che $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \bar{\phi}_\lambda \equiv \bar{\phi}_\lambda^{-1}$ con $\bar{\phi}_\lambda \equiv B(\phi_\lambda)$, infine j è l'applicazione canonica $j : V \hookrightarrow \mathbf{R} \times V$.

Le equazioni differenziali possono venire inoltre rappresentate da opportuni sottofibrati di $\mathcal{D}^k(V, W)$ e ciò permette di trattarle in maniera intrinseca e globale.

All'interno di questo quadro matematico trova una sua naturale formulazione la fisica di sistemi continui che in breve si può assiomaticizzare riducendo un sistema continuo ad un quadrupletto $CS \equiv (V, \mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}; E_k(\mathcal{Q}))$, dove V è lo spazio-tempo e $\pi_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \rightarrow V$ è un fibrato di oggetti geometrici, *spazio di configurazione*, sul quale si considera l'equazione differenziale $E_k(\mathcal{Q})$, *equazione dinamica*. Riassumiamo, per brevità, alcuni concetti che permettono di dare un significato strutturale a grandezze fisiche caratteristiche della fisica del continuo:

- a) *vincoli interni* $\mathcal{Q}' \hookrightarrow \mathcal{Q}$ sotto fibrati di $\mathcal{Q}$ su V .
- b) *equazioni di stato*: $F_{k'}(\mathcal{Q})$ equazioni differenziali su $\mathcal{Q}$.
- c) *equazioni costitutive*: operatori differenziali su $\mathcal{Q}$.
- d) sistema continuo CS generato per *interazione* da altri due sistemi continui. CS_1 e $CS_2 : \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \oplus \mathcal{Q}_2, E_k(\{o\} \oplus \mathcal{Q}_2) = E_k^{(2)}(\mathcal{Q}_2), E_k(\mathcal{Q}_1 \oplus \{o\}) = E_k^{(1)}(\mathcal{Q}_1); E_k(\mathcal{Q}) \neq E_k^{(1)}(\mathcal{Q}_1) \oplus E_k^{(2)}(\mathcal{Q}_2)$.

Infine sfruttando il concetto di fibrato di oggetti geometrici si ottiene un modo diretto per trattare proprietà di simmetria, che però qui tralasciamo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] LICHNEROWICZ A., *Theories Relativistes de la Gravitation*, Masson (Paris), 1965.
- [2] NOLL W., *A new mathematical theory of simple materials*, Arch. Rational Mech. Anal. 48 (1972), 1-50.
- [3] MARSDEN J., *Applications of Global Analysis in Mathematical Physics*, Publish or Perish (1974).
- [4] WANG C. C., *On the geometric Structures of Simple Bodies*, Arch. Rat. Mech. Anal. 27 (1967), 33-94.
- [5] CRUMEYROLLE A., *Sur une geometrization de la mécanique relativiste de milieux continus à densité de spin*, Ann. Inst. Henri Poincaré 21 (1974), 221-236.
- [6] PRASTARO A., *On the general structure of continuum physics: I, Derivative spaces*,

II, Differential operators; III, The physical Picture; to appear.

- [7] NIJENHUIS A., *Theory of Geometric objects*; Doctoral Thesis, Amsterdam (1952).
- [8] SALVIOLI S. P., *On the theory of geometric objects*, J. Diff. Geom. 7 (1972), 257-278.

CESARE REINA (*)

SIMMETRIE INTERNE DEI CAMPI GRAVITAZIONALI ASSISIMMETRICI.

Internal symmetries of axisymmetric gravitational fields

Abstract.

The group H of the internal symmetries of the axisymmetric field equations in general relativity is known to be isomorphic to $SO(2,1)$, which is the double covering of the conformal group of the hyperbolic complex plane $\mathcal{H}$. The Ernst potential ξ can be then geometrically understood as a map $\xi: R^3/SO(2) \rightarrow \mathcal{H}$. The fact that hyperbolic plane is split into two connected components is used to introduce an algebraic invariant $n \in Z^+$ for every axisymmetric solution. It is shown that under reasonable hypotheses this invariant is related to the number of S^1 curves where the manifold is intrinsically singular.

Nelle formulazioni date da Ernst, le equazioni di campo per campi gravitazionali assisimmetrici si riducono ad una equazione per un potenziale complesso ξ . Si mostra che l'ambiente per naturale per lo studio è il piano iperbolico $\mathcal{H}$: il potenziale ξ può essere considerato come una mappa $\xi: R^3/SO(2) \rightarrow \mathcal{H}$, ed il gruppo di simmetrie interne coincide con il gruppo delle isometrie di $\mathcal{H}$. Si introduce un invariante algebrico $n \in Z$, che classifica le mappe ξ , ed i campi gravitazionali relativi, a seconda della loro struttura causale. Si mostra infatti che, sotto opportune condizioni, $n/2$ è il numero delle singolarità ad anello dello spazio tempo descritto da ξ .

L'equazione di Ernst ⁽¹⁾

$$(1) \quad (\xi \bar{\xi} - 1)_{(3)} \nabla^2 \xi = 2 \bar{\xi}_{(3)} \nabla \xi \cdot_{(3)} \nabla \xi$$

ove ξ è un campo complesso, e $_{(3)}\nabla$ è l'operatore differenziale 3-dimensionale,

(*) Istituto di Fisica dell'Università di Milano.

(1) F. J. Ernst, Phys. Rev. D. 167, 1175 (1968).

può essere derivata dalla variazione dell'azione (2):

$$(2) \quad S = \int \frac{{}_{(3)}\nabla \xi \cdot {}_{(3)}\nabla \xi}{(1 - \xi \bar{\xi})^2} d_3 x = \int g({}_{(3)}\nabla \xi, {}_{(3)}\nabla \xi) d_3 x$$

ove $g(\cdot, \cdot)$ è la metrica di Poincaré. Con questa metrica il piano complesso è una varietà di curvatura costante negativa, detta piano iperbolico $\mathcal{H}$ (3). Dunque il potenziale ξ può essere considerato come una mappa

$$(3) \quad \xi : R^3/SO(2) \rightarrow \mathcal{H}$$

che in forza delle (2) deve essere estrema. Il dominio di ξ è $R^3/SO(2)$ nel senso che ξ è assisimmetrico, ovvero indipendente dalla coordinata azimutale di R^3 .

Il gruppo di simmetrie interne dell'equazione (1) coincide con il gruppo di isometrie di $\mathcal{H}$. Si tratta ovviamente del gruppo a 3 parametri delle trasformazioni conformi del piano complesso $\mathbb{C}$

$$(4) \quad \mathcal{G} = \left\{ f \mid f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; f(\xi) = e^{i\alpha} \frac{\xi - p}{1 - \bar{p}\xi}; (p\bar{p} < 1), (0 \leq \alpha < 2\pi) \right\}$$

che coincide con il gruppo delle trasformazioni di Ehlers nella forma data da Kinnersley (4). Si noti che il sottogruppo di isotropia di $\mathcal{G}$ all'origine ($p = 0$) dato da $f(\xi) = e^{i\alpha}\xi$, genera trasformazioni NUT della varietà (5).

Oltre al gruppo $\mathcal{G}$, vi sono anche le seguenti isometrie discrete

$$(5) \quad \xi \rightarrow \bar{\xi}; \quad \xi \rightarrow -\xi; \quad \xi \rightarrow 1/\xi.$$

Le prime due sono riflessioni di $\mathcal{H}$, mentre l'ultima deriva dal fatto che il dominio $\xi\bar{\xi} > 1$ è una copia isometrica del disco $\xi\bar{\xi} < 1$ sotto inversione.

(2) Si noti la somiglianza formale tra il problema presente e il problema σ -non lineare (si veda A. A. Belavin e A. M. Polyakov, JETP Lett. 22, 245 (1976) e G. Woo, J. Math. Phys. 18, 1264 (1977). Ciò è dovuto al fatto che il modello σ -non lineare è invariante per $SO(3)$, mentre il presente problema lo è per $SO(2,1)$, grazie all'isomorfismo $\mathcal{G} \simeq SO^+(2,1)$. Il fatto che rende il presente problema di difficile soluzione, a differenza del modello σ che è stato integrato, non è comunque dovuto alla compattezza del gruppo di invarianza, ma al fatto che il modello σ è definito su R^2 , mentre il problema assisimmetrico su $R^3/SO(2)$. (Si veda C. Reina, M. Martellini, P. Sodano, sottoposto per la pubbl. su J. Math. Phys. (1979).

(3) Si veda ad esempio I. M. Singer e I. A. Thorpe «Lecture notes on Elementary Topology and Geometry». Scott, Foresman et al (1967).

(4) W. Kinnersley, J. Math. Phys. 14, 651 (1973).

(5) C. Reina and A. Treves, J. Math. Phys. 16, 834 (1975).

Lo studio dal punto di vista topologico della mappa ξ non sembra offrire spunti importanti. Infatti, sebbene sia possibile imporre condizioni al contorno tali da consentire la compattificazione del dominio di ξ , il codominio non è compatto, e pertanto sembra irrilevante studiare il problema dell'omotopia. In sostanza tutte le mappe ξ sono contraibili.

C'è tuttavia un invariante interessante, connesso alla struttura algebrica delle soluzioni dell'equazione (1). Esse possono essere classificate a seconda del numero di «salti» tra le due componenti connesse del piano iperbolico, ovvero a seconda del numero n di superfici di rotazione di R^3 , ove $\xi\bar{\xi} = 1$. Questo numero è

- i) invariante per trasformazioni di coordinate in $R^3/SO(2)$
- ii) invariante sotto l'azione del gruppo $\mathcal{C}$ e delle simmetrie discrete (5).

Grazie alla proprietà (i) è possibile scegliere un sistema di coordinate, che, nel nostro caso, sarà dato dalle coordinate prolate sferoidali (x, y) in $R^3/SO(2)$. Si può mostrare che nelle ipotesi

A) $\lim \xi\bar{\xi} = \infty$ per $x \rightarrow \infty$

B) $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ per $y \rightarrow -y$

C) sul piano equatoriale, ove ξ è reale grazie alla B, ξ è una funzione dispari di x ,

il numero n è sempre pari e $n/2$ è il numero di singolarità ad anello (topologicamente S^1) sul piano equatoriale dello spazio tempo descritto da ξ (6).

L'ipotesi A equivale a chiedere che ξ descriva varietà asintoticamente piatte. L'ipotesi B traduce la richiesta che il momento angolare cambi segno sotto riflessioni attorno al piano equatoriale. L'ipotesi C, che può sembrare un poco «ad hoc», è in realtà soddisfatta dalla più vasta classe di soluzioni note fino ad ora, ovvero da tutte le soluzioni di Tomimatsu-Sato.

(6) Per la dimostrazione si veda C. Reina, J. Math. Phys. in stampa (1979).



CESARE REINA (*), ALDO TREVES (*)

DISCHI DI ACCRESCIMENTO
INTORNO A SINGOLARITA' NUDE DI KERR.
PROPRIETA' E PROBLEMI**.

Si studiano le orbite circolari intorno a una singolarità nuda di Kerr, allo scopo di dedurre qualche proprietà dei dischi di accrescimento intorno a tali singolarità. Si mostra che per $a/M \gg 1$, il raggio interno del disco e la corrispondente energia sono funzioni crescenti di a/M . Per $1 < a/M < (32/27)^{1/2}$ c'è una patologia legata alla definizione di stato ad energia positiva e negativa. Per $a/M = (32/27)^{1/2}$ l'intera energia di massa di una particella di prova può essere estratta nel processo di accrescimento.

Some properties and problems of accretion disks about Kerr naked singularities.

Some properties of accretion disks about Kerr naked singularities are deduced by studying circular orbits of test particles. It is found that for $a/M \gg 1$ the inner radius of the disk and the corresponding energy increase with a/M . For $1 < a/M < (32/27)^{1/2}$ there is a pathology related to the definition of positive and negative energy states. For $a/m = (32/27)^{1/2}$ the entire mass-energy of the test particle can be extracted.

(*) Istituto di Fisica dell'Università di Milano.

(**) Questo lavoro comparirà sul numero del 15 Gennaio 1979 dell'Astrophysical Journal.



GIOVANNI SILVESTRO (*)

TEST OSSERVATIVO DELLA PRESENZA DI BLACK HOLES MASSICCE NEGLI AMMASSI GLOBULARI.

Abstract.

A method is presented for detecting the presence of a massive black hole at the centre of a globular cluster by recording a sequence of symmetric light pulses, each due to the amplification, by the «gravitational lens» effect, of the luminosity of an orbiting star when it goes behind the central object. Counting rates are estimated taking into account the effect of a distribution of stellar masses in the system and the observational possibilities are discussed.

Dei 125 ammassi globulari noti nella Galassia, ben 8 risultano associati con sorgenti di emissione persistente o in «bursts» di raggi X, scoperte dai rivelatori posti sui satelliti Uhuru, OSO 7, Ariel 5 e SAS 3 (Grindlay 1976) (a essi si è aggiunto recentemente (Grindlay 1978) l'ammasso Kron 3 nella Piccola Nube di Magellano). Ciò sembra indicare una marcata preferenza, il cui significato per il momento non è del tutto chiaro, delle sorgenti di radiazione ad alta energia per tale classe di sistemi celesti.

In base alla teoria dell'evoluzione dei sistemi stellari, i nuclei degli ammassi globulari potrebbero contenere oggetti collassati (Peebles 1972a). Modelli (Bahcall e Ostriker 1975; Silk e Arons 1975) sono stati proposti in cui l'emissione X è interpretata come conseguenza della accrezione di gas da parte di un oggetto collassato («black hole») massiccio posto al centro dell'ammasso. I dati osservativi tuttavia non permettono al momento di precisare il meccanismo di radiazione e le condizioni fisiche del sistema (e di escludere quindi altri modelli come quello binario (Fabian et al. 1975)), inoltre vi sono forti incertezze teoriche sulla evoluzione finale dei sistemi stellari (Silvestro 1976). Recentemente Eardley et al. (1978) hanno calcolato lo spettro di emissione X persistente da disco di accre-

(*) Istituto di Fisica Generale, Università di Torino; Laboratorio di Cosmo-geofisica del CNR, Torino.

zione attorno a una black hole massiccia in un ammasso globulare. E' difficile tuttavia che si ottenga un accordo tra lo spettro teorico e i dati osservativi tale da costituire prova convincente della presenza dell'oggetto collassato. Sarebbe perciò di importanza cruciale disporre di tests osservativi indipendenti per l'esistenza di black holes massicce.

Peebles (1972b) ha fatto notare che un oggetto collassato posto al centro di un sistema stellare darebbe luogo a un addensamento di stelle nelle vicinanze: stime successive (Bahcall e Wolf 1977) hanno portato a valutare un valore minimo rivelabile, mediante conteggio di stelle con osservazioni da Terra, della massa collassata $M_h \gtrsim 10^4 m_\odot$. Le osservazioni (Bahcall 1976; Bahcall e Hausman 1976, 1977) hanno dato sinora risultati negativi. Silvestro (1974) ha mostrato che un oggetto massiccio collassato in un sistema stellare denso dà origine a una serie di impulsi luminosi simmetrici, ciascuno dovuto alla amplificazione per effetto «lente gravitazionale» della luminosità di una stella orbitante quando questa passa dietro la black hole. Discuteremo qui le possibilità osservative di tale processo per il caso di un ammasso globulare, facendo uso dei nuovi risultati sulla distribuzione di stelle e tenendo conto dello spettro di masse stellari nel sistema.

Un raggio luminoso che passa a una distanza minima r dal centro di una distribuzione sfericamente simmetrica di massa M subisce, secondo la teoria generale della relatività, una deviazione verso la massa M di un angolo θ che, per piccole deflessioni, vale

$$\theta = \frac{4 GM}{c^2 r} = 4 m/r$$

($m = GM/c^2$: massa del deflettore in unità geometriche; G : costante gravitazionale; c : velocità della luce). Segue che, quando una stella S si trova dietro il deflettore B , la luce da S può raggiungere l'osservatore O secondo due diversi cammini nel piano determinato da S , B , O e dare perciò due «immagini» S_1 e S_2 (fig. 1). L'intensità luminosa ricevuta in O può essere notevolmente amplificata quando S si trova vicina alla linea di vista OB . L'effetto, analizzato da Einstein nel 1936, è considerato non avere interesse pratico per deflettori di ordinaria massa stellare ma, come vedremo, può avere conseguenze apprezzabili quando un deflettore massiccio collassato è posto in un sistema stellare sufficientemente ricco e denso.

Nel caso in cui $a \ll d$ (a : distanza sorgente-deflettore; d : distanza deflettore-osservatore), il guadagno di intensità $g = \Delta F/F$ (F è il flusso ricevuto dall'osservatore O in assenza di deflettore) è dato da

$$(1) \quad g \approx \alpha_0/\phi$$

dove l'angolo ϕ è mostrato in fig. 1 e

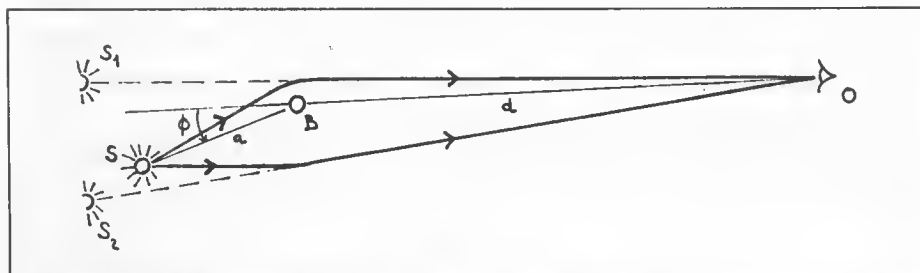


Figura 1. La deviazione gravitazionale dei raggi luminosi da parte del deflettore B di massa M fa sì che l'osservatore O osservi due immagini S_1 e S_2 della sorgente S .

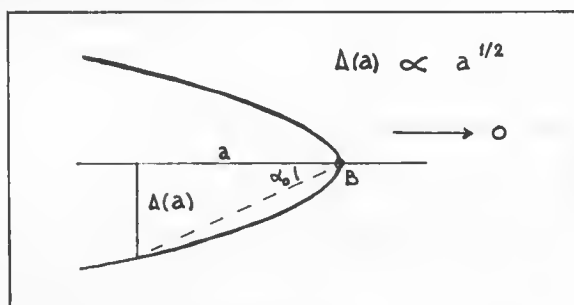


Figura 2. Il cono di amplificazione.

$$\alpha_0 = 2m^{1/2}a^{-1/2}$$

definisce il «cono di amplificazione» (fig. 2): allorché la stella orbitante entra nel cono la sua luminosità è amplificata di un fattore $g \geq 1$.

Un oggetto massiccio collassato di massa M_h posto al centro di un sistema stellare sfericamente simmetrico modifica la distribuzione di densità $n(a)$ e la velocità quadratica media $v_0(a)$ delle stelle entro una «sfera caratteristica» di raggio $a_h = GM_h/v_c^2$. Il calcolo è stato effettuato da Bahcall e Wolf (1976) nel caso di un sistema di stelle tutte della stessa massa risolvendo numericamente un'equazione del tipo di Fokker-Planck che descrive la diffusione di stelle per incontri gravitazionali nella buca di potenziale della black hole; la soluzione può essere approssimata con le espressioni:

$$n(a) \approx n_0 [1 + (a_h/a)^{7/4}] \quad a_h \geq a \geq 10 a_T$$

$$\propto a^{-1,60} \quad 10 a_T > a \geq a_T$$

$$\approx 0 \quad a_T > a$$

$$v_0^2(a) = (12/13) GM_h/a \quad a \leq a_h$$

(a : coordinata radiale; n_0 , v_c sono rispettivamente la densità stellare e la dispersione di velocità unidimensionale «imperturbate» al centro dell'ammasso; $a_T = 1,08 \cdot 10^{12} M_3^{1/3}$ (cm) è il raggio di Roche della black hole al di sotto del quale le stelle sono distrutte per effetto di marea, avendo posto $M_3 = m_h/10^3 m_\odot$).

Il numero di stelle entro da alla distanza radiale a che entrano nel cono di amplificazione nell'unità di tempo è dato da

$$(3) \quad dn^* = (2\pi/3)^{1/2} \Delta(a) v_0(a) n(a) da$$

dove $\Delta(a) = a \times \alpha_0(a)$ è l'apertura del cono di amplificazione al raggio a . Integrando la (3), con i valori di $n(a)$, $v_0(a)$ dati dalle Eq. (2), fra i limiti a_T e a_h (stelle fuori della sfera caratteristica danno un piccolo contributo) si ottiene la frequenza n^* di «eventi» in cui la luminosità di una stella è amplificata di un fattore ≥ 1 :

$$(4) \quad n^* = 9,40 \times 10^{-9} n_c (pc^{-3}) (v_c/10 \text{ km s}^{-1}) M_3^{5/2} (yr^{-1})$$

La frequenza di eventi con guadagno $\geq g$ è data (Eq. 1) da

$$n(g) \approx g^{-1} \cdot n^*$$

La durata tipica dell'impulso luminoso è

$$\tau \approx 10^2 M_3^{1/3} \text{ (sec)}$$

e dipende debolmente da g .

La Tabella 1 mostra i conteggi previsti per l'ammasso globulare (sorgente di raggi X) NGC 6624, valutati facendo uso dei dati di Peterson e King (1975): densità centrale $n_c = 10^5$ stelle pc^{-3} , dispersione di velocità $v_c = 3,82 \text{ km s}^{-1}$, e assumendo una massa stellare $m_* = 0,5 m_\odot$. Per i rimanenti ammassi che sono sorgenti X, come pure per altri ammassi compatti nella Galassia, si ottengono conteggi non molto inferiori; in particolare i sistemi NGC 6093, NGC 6522 e NGC 7099 danno conteggi quasi identici a quello di NGC 6624.

Tabella 1. Ammasso globulare NGC 6624 ($m_* = 0,5 m_\odot$), $n_c = 10^5 pc^{-3}$, $v_c = 3,82 \text{ km s}^{-1}$.

M_3	$n^*(yr^{-1})$
1	$3,87 \cdot 10^{-2}$
2	$2,20 \cdot 10^{-1}$
5	2,17
10	$1,22 \cdot 10^1$

Valutiamo le possibilità osservative del metodo per l'ammasso NGC 6624, assumendo osservazioni con diaframma $\theta = 1''$, corrispondente al limite posto dal «seeing disk» in condizioni di buona visibilità. E' possibile calcolare che entro questo diaframma cadrebbero $n \approx 40$ stelle al centro dell'ammasso, e da ciò si deduce che una misura di fotometria fotoelettrica con accuratezza dell'1% come è correntemente praticabile può permettere di registrare eventi con guadagno $g \approx \approx 0,4$: in base all'Eq. (1) questi si succedono con frequenza superiore di un fattore 2,5 rispetto ai valori elencati nella Tab. 1.

La distribuzione usata (Eq. 2) corrisponde al caso di un sistema di stelle tutte della stessa massa. Bahcall e Wolf (1977) hanno determinato la distribuzione stazionaria di stelle con spettro arbitrario di masse attorno a una black hole massiccia in un ammasso globulare. Nel caso realistico di due popolazioni di massa m_2 e $m_1 = 2m_2$ con uguali numeri totali di stelle dei due tipi, la componente di stelle più massicce è maggiormente concentrata vicino alla black hole secondo la distribuzione $n_1(a) \propto a^{-1,90}$; poiché il contributo predominante al conteggio viene proprio dalle stelle orbitanti a raggi vicini al valore minimo a_T , ne risulta un aumento di un fattore ≈ 5 rispetto ai valori dati dall'Eq. (4). Si avrebbe in definitiva, tenendo conto dello spettro di masse e del segnale minimo rivelabile, una frequenza di conteggi più grande per un fattore ≥ 10 dei valori della Tab. 1, cosicché osservazioni da Terra dell'effetto di «scintillazione» al centro degli ammassi globulari permetterebbero di abbassare il limite inferiore per la massa collassata $M_h^{(min)} = 10^4 m_\odot$ rivelabile mediante conteggio di stelle. Si sta ora analizzando (Silvestro 1979) la possibilità di ridurre ancora notevolmente tale limite mediante osservazioni con un telescopio posto fuori dell'atmosfera, che non andrebbe incontro alle limitazioni poste dal «seeing disk».

Notiamo che la funzione di densità stellare usata (Eq. 2) e la sua generalizzazione al caso di diverse masse stellari sono dedotte nell'ipotesi di distribuzione stazionaria, che implica fra l'altro equipartizione di energia fra le stelle di diversa massa. Tuttavia Spitzer (1969) ha mostrato che, in un sistema stellare a due componenti di masse m_1 e m_2 , se la massa totale in stelle massicce $M_1 = n_1 m_1$ è superiore a un certo valore critico, la condizione di equipartizione non può mai essere raggiunta: le stelle massicce formano un sistema autogravitante a calore specifico < 0 che continua a contrarsi indefinitamente senza mai raggiungere l'equilibrio. Tale risultato è stato recentemente generalizzato da Vishniac (1978) al caso di una distribuzione continua di masse stellari: la funzione di massa iniziale di Salpeter in effetti viola la condizione di equipartizione, e da ciò segue la possibilità che in molti ammassi globulari si sia verificato il collasso del nucleo poco dopo la formazione del sistema. Ciò è importante perché offre una via d'uscita alle difficoltà venute in luce in seguito a recenti calcoli di dinamica stellare (Lightman e Fall 1978; Shapiro 1977; Lightman e Shapiro 1978), secondo cui è

improbabile che una black hole massiccia ($> 100 m_{\odot}$) si formi al centro di un ammasso globulare come risultato di collisioni stellari e coalescenza nelle fasi avanzate dell'evoluzione del «core».

Osserviamo che, in base ai modelli proposti, la black hole può emettere un flusso apprezzabile di raggi X solo se circondata da una atmosfera di gas sufficientemente densa, di conseguenza l'assorbimento della radiazione potrebbe rendere l'effetto «lente gravitazionale» inosservabile; segue che i sistemi contenenti oggetti collassati che *non* sono sorgenti X presentano condizioni più favorevoli per la registrazione dell'effetto. A questo proposito è interessante osservare (cfr. Peterson e King 1975) come numerosi ammassi globulari che non mostrano segni di emissione X possiedono gli stessi valori elevati di densità centrale ρ_c e velocità di fuga dal sistema v_f di quegli ammassi che sono sorgenti X. Se poi si tiene conto che fra questi ultimi il sistema NGC 6712 possiede valori modesti di ρ_c , v_f si deve concludere che la correlazione inizialmente proposta (alte ρ_c , $v_f \Leftrightarrow$ emissione X) è probabilmente poco significativa.

Ricordiamo infine come Aarseth (1974) e Spitzer e Shull (1975) hanno suggerito la possibilità di una sequenza di ripetuti collassi del «core» dell'ammasso globulare, nessuno dei quali distrugge il resto del sistema. In queste condizioni ci si può attendere, nella fase precedente ciascun collasso, una densità di stelle vicino al centro molto superiore a quella data dalle Eq. (2) valide per una situazione stazionaria, e quindi un conteggio notevolmente più alto di quanto stimato in precedenza. Per valutare accuratamente l'effetto in queste condizioni saranno necessari calcoli dinamici dettagliati.

In conclusione, il metodo qui presentato sembra offrire possibilità interessanti per lo studio dei sistemi stellari in diverse fasi evolutive e anche per dare una risposta al problema per ora aperto se esistano nell'universo oggetti massicci collassati.

BIBLIOGRAFIA

- AARSETH S. J. 1974, *Astron. Astrophys.* **35**, 237.
BAHCALL J. N. e OSTRICKER J. 1975, *Nature*, **256**, 23.
BAHCALL J. N. e WOLF R. A. 1976, *Astrophys. J.*, **209**, 214.
—, 1977, *Astrophys. J.*, **216**, 883.
BAHCALL N. A. 1976, *Astrophys. J. (Letters)*, **204**, L 83.
BAHCALL N. A. e HAUSMAN M. A. 1976, *Astrophys. J. (Letters)*, **207**, L 181.
—, 1977, *Astrophys. J.*, **213**, 93.
EARDLEY D. M., LIGHTMAN A. P., PAYNE, D. G. e SHAPIRO L. S. 1978, *Astrophys. J.*, **224**, 53.
FABIAN A. C., PRINGLE J. E. e REES M. J. 1975, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **172**, 15P.

- GRINDLAY J. E. 1976, in *Highlights of Astronomy*, vol. 4 (in corso di stampa).
- GRINDLAY J. E. 1978, *Astrophys. J. (Letters)*, *224*, L 107.
- LIGHTMAN A. P. e FALL M. S. 1978, *Astrophys. J.*, *221*, 567.
- LIGHTMAN A. P. e SHAPIRO S. L. 1978, *Rev. Mod. Phys.*, *50*, 437.
- PEEBLES P. J. E. 1972a, *General Relativity Journal*, *3*, 61.
—, 1972b, *Astrophys. J.*, *178*, 371.
- PETERSON C. J. e KING I. R. 1975, *Astronom. J.*, *80*, 427.
- SHAPIRO S. L. 1977, *Astrophys. J.*, *217*, 218.
- SILK J. e ARONS J. 1975, *Astrophys. J. (Letters)*, *200*, L 131.
- SILVESTRO G. 1974, *Astron. Astrophys.*, *36*, 41.
—, 1976: «Il problema gravitazionale degli N-corpi», lezioni per il corso di Complementi di Fisica Teorica, Università di Parma.
—, 1979, in preparazione.
- SPITZER L. 1969, *Astrophys. J. (Letters)*, *158*, L 139.
- VISHNIAC E. T. 1978, *Astrophys. J.*, *223*, 986.



INDICE

	<i>Pagine</i>
Prefazione	3
Saluto del Presidente Norberto BOBBIO	5 - 6
Parole di introduzione del Prof. Cataldo AGOSTINELLI, Presidente del Convegno	7 - 9

CONFERENZE

E. AMALDI, <i>Recenti progressi dell'esperimento sulle onde gravitazionali della Università di Roma</i>	13 - 34
B. BERTOTTI, <i>La radiazione gravitazionale di fondo: teoria e rivelazione</i>	35 - 44
E. BRINIS UDESCHINI, <i>Questioni relativistiche nella trattazione spinoriale</i>	45 - 73
C. CATTANEO, <i>Considerazioni machiane classiche e relativistiche</i>	75 - 91
M. FRANCAVIGLIA, <i>Metodi e prospettive matematiche in relatività generale</i>	93 - 109
D. GALLETTO, <i>Sui fondamenti della meccanica classica, della teoria della gravitazione e della cosmologia newtoniana</i>	111 - 157
T. REGGE, <i>Le teorie unificate della gravitazione</i>	159 - 168
R. RUFFINI, <i>Relatività generale: dalla cosmologia alla fisica della Galassia</i>	169

COMUNICAZIONI

G. ARCIDIACONO, <i>L'universo di De Sitter e la relatività proiettiva</i>	173 - 176
F. BAMPI, <i>Interpretazione geometrica della condizione di Shearfree nel teorema di Robinson</i>	177 - 180
S. BENENTI, <i>Concetti e risultati principali della teoria delle strutture di separabilità su varietà riemanniane</i>	181 - 187
M. CALVANI, R. CATENACCI e F. SALMISTRARO, <i>Formula di massa e trasformazioni in metriche con singolarità nude</i>	189 - 193
C. CASTAGNOLI, P. GALEOTTI, L. PERIALE e O. SAAVEDRA, <i>Rivelazione dei neutrini emessi durante il collasso gravitazionale di un core stellare</i>	195 - 203
R. CATENACCI e F. SALMISTRARO, <i>Geometria differenziale complessa in relatività generale</i>	205 - 209
G. CAVIGLIA e C. ZORDAN, <i>Nota sul campo elettromagnetico generato da una carica in moto in relatività generale</i>	211 - 214
R. FABBRI, F. MELCHIORRI e V. NATALE, <i>Misura del parametro di decelerazione cosmologica tramite l'effetto Sunyaev-Zeldovich</i>	215 - 218
D. FARGION, <i>Stabilità ed instabilità dei modelli cosmologici con campo magnetico uniforme</i>	219 - 223
P. FARINELLA, A. MILANI e A. M. NOBILI, <i>A method to measure the gravitational constant in an orbiting laboratory</i>	225 - 227

M. FERRARIS, <i>Immersioni algebriche isometriche di soluzioni esatte delle equazioni di Einstein</i>	229 - 233
P. FORTINI, F. FULIGNI e C. GUALDI, <i>Sull'esistenza di radiazione gravitazionale anticipata</i>	235 - 237
R. GOLDONI, <i>Un contesto puramente geometrico per descrivere la gravità e l'inerzia</i>	239 - 244
R. GRASSINI, <i>Modello canonico di spazio-tempo</i>	245 - 249
S. LESCHIUTTA e E. DETOMA, <i>Esperimenti gravitazionali con orologi</i>	251 - 268
E. MASSA, <i>Aspetti dinamici della teoria relativistica della conduzione del calore</i> . . .	269 - 278
S. MORISSETTI, C. REINA e A. TREVES, <i>Classificazione di Petrov di varietà assisimetriche vuote</i>	279 - 281
F. OCCHIONERO e N. VITTORIO, <i>Condensazioni di galassie in universi a bassa densità</i>	283 - 287
A. PRASTARO, <i>Spazi derivativi e fisica del continuo in relatività generale</i>	289 - 292
C. REINA, <i>Simmetrie interne dei campi gravitazionali assisimmetrici</i>	293 - 295
C. REINA e A. TREVES, <i>Dischi di accrescimento intorno a singolarità nude di Kerr. Proprietà e problemi</i>	297
G. SILVESTRO, <i>Test osservativo della presenza di black holes massicce negli ammassi globulari</i>	299 - 305
Indice	307 - 308

A. S.
b/lex